

# 熱伝導及び粘性を考慮した 2 次元 MPD スラスタの数値解析

北大 工 本間 利久  
北大 院 久保 信明

## 1. はじめに

MPD スラスタは宇宙電磁推進機の中で、最も実用化が望まれている電気推進機の一つである。しかし、推進機内部の電磁流体的な現象は非常に複雑であるためその現象を解明する目的で多くの研究機関で実験及び数値解析が行われてきた。本研究室においても数値解析を中心に MPD スラスタの内部流現象の把握を試みてきた。これまで、プロトタイプの解析コードを基本に、推力の形状依存性、熱拡散効果の動作依存性等、コードの改善が行われてきたが、解析結果と実験値の比較では、全推力の比較を中心に行ってきた。一方、実験からわかるもう一つの測定量としてスラスタ内部の温度分布があるが、従来のコードでは推力の一致はあるものの温度分布は大きく測定と異なっていたという問題点があった。このような背景から、本研究では、より正確に把握すべくスラスタの内部流散逸効果を考慮した解析コードの開発を目的とする。とりわけ、散逸効果を考慮するための改良として下記の 3 つをコードに取り入れた。

- 電気伝導度の空間的・温度・密度依存
- 熱の拡散現象
- 粘性効果

なお、図 1 に MPD スラスタの動作原理を示す。

## 2. 基礎方程式

MPD スラスタ内部のプラズマを電磁流体として扱うことを前提に、解析では以下の仮定を用いる。

- (a) 準定常、2次元の自己誘起磁場のみを考える。
- (b) 推進剤は 1 価の完全電離アルゴンガスとする。
- (c) 電極近傍の境界層及びシースを無視する。
- (d) プラズマは理想気体の状態方程式に従う。

実際の解析においては、上記の仮定のもと、スラスタ内部のプラズマを流体場と電磁場の結合系とみなし、それぞれの場が互いに自己無撞着となるよう解を求めらる。

### 2.1 流体場の定式化

流体場の解析に用いた式は無次元化された圧縮性ナビエ・ストークス方程式であり、電磁場と結合させたものをベクトル表示の準保存形で表すと、

$$\frac{\partial Q'}{\partial t} + \frac{\partial F'_1}{\partial x} + \frac{\partial G'_1}{\partial y} + \frac{\partial F'_2}{\partial x} + \frac{\partial G'_2}{\partial y} + S' = 0 \quad (1)$$

$$Q' = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix} \quad F'_1 = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{bmatrix} \quad G'_1 = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{bmatrix}$$

$$F'_2 = \frac{A}{L^2} \begin{bmatrix} 0 \\ f_x \\ -\tau \\ (uf_x - v\tau - (L^2/m^2 R^2)g_x) \end{bmatrix}$$

$$G'_2 = \frac{A}{L^2} \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau \\ f_y \\ (vf_y - u\tau - (L^2/m^2 R^2)g_y) \end{bmatrix}$$

$$S' = \begin{bmatrix} 0 \\ 2B \partial B / \partial x \\ 2B \partial B / \partial y \\ 2(E_y \partial B / \partial x - E_x \partial B / \partial y) \end{bmatrix} \quad (2)$$

ただし、

$$E_x = \frac{1}{R_m} \frac{\partial B}{\partial y} - vB, \quad E_y = -\frac{1}{R_m} \frac{\partial B}{\partial x} + uB$$

$$f_x = \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad f_y = \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$g_x = k_t \frac{\partial T}{\partial x}, \quad g_y = k_t \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \tau = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

である。ここで、 $\rho$  は密度、 $u$  と  $v$  はそれぞれ速度の  $x$  成分と  $y$  成分、 $p$  は圧力、 $e$  は単位体積当たりのエネルギー、 $B$  は磁場の  $z$  成分、 $E_x$  と  $E_y$  はそれぞれ電場の  $x$  成分と  $y$  成分、 $R_m$  は磁気レイノルズ数、 $\mu$  は粘性係数、 $k_t$  は熱伝導係数、 $T$  は温度である。なお、 $L$ 、 $m$ 、 $R$ 、 $A$  は無次元化の際にでてくる値で、それぞれ順に、代表長さ、質量流量、気体定数、スラスタ出口の面積を表している。この後、さらに、式(1)を一般曲線座標系に書き換えて数値計算する。

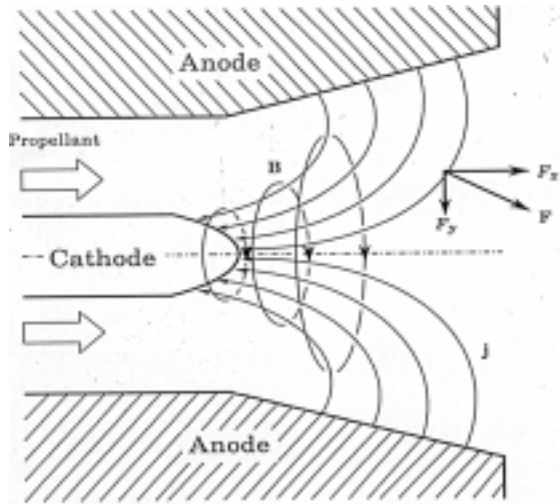


図1 MPD スラスタの動作原理

## 2.2 電磁場の定式化

電磁場の解析には、Maxwell の方程式と、オームの法則から導かれる誘導方程式を無次元化した無次元化誘導方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \times \left( \frac{1}{R_m} \nabla \times \mathbf{B} \right) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{1}{R_m} \left( \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{1}{R_m^2} \frac{\partial R_m}{\partial x} + u \right) \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ + \left( \frac{1}{R_m^2} \frac{\partial R_m}{\partial y} + v \right) \frac{\partial B_z}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) B_z = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

(3) は誘導方程式で (4) は無次元化誘導方程式である。この後、式(4)を一般曲線座標系に書き換えて数値計算する。

## 2.3 輸送係数

本解析では、完全電離を仮定しているため、全ての輸送係数は、荷電粒子の衝突のみを考慮した Spitzer-Harm による式を用いた。

$$\text{電気伝導度} \quad \sigma = 1.53 \times 10^{-2} \frac{T^{3/2}}{\ln \Lambda} \quad (5)$$

$$\text{熱伝導係数} \quad k_t = 4.4 \times 10^{-10} \frac{T^{5/2}}{\ln \Lambda} \quad (6)$$

$$\text{粘性係数} \quad \mu = 2.21 \times 10^{-16} \frac{T^{5/2}}{\ln \Lambda} \quad (7)$$

$$\text{ただし、} \quad \Lambda = 1.24 \times 10^7 \frac{T^{3/2}}{n^{1/2}}$$

ここで、 $n$  は数密度、 $\Lambda$  は全ての式に共通である。各係数は温度に強く依存している。

## 3. 数値解法

電磁場における特性時間は流れ場のそれに比べて極めて短いので、電磁場と流れ場を同時に解くのは計算効率が悪くなる。このことを考慮して、本解析では電磁場と流れ場とを別々に解き、反復法によって収束解を求めるという方法を適用した。

流体場解析には陽的対称 TVD MacCormack スキームを、電磁場解析には逐次過緩和法 (SOR 法) を用いて計算を行った。解析フローを図3に示す。なお、散逸項は TVD スキームとは別に付加的に解いた。計算格子は Poisson 方程式を用いた境界適合法によって作成し、境界面および内部における格子の直交性の調節は、Poisson 方程式の非同次項を操作して行った。節点数は  $x$  方向で 80 点、 $y$  方向で 40 点とした。(粘性計算時:  $y$  方向に 80 点)。この方法で作成した計算格子を図2に示す。

境界条件としては、壁面(電極面)ではすべりなし条件、対称軸では対称条件、流入境界では亜音速流入を仮定して固定条件を与え、流出境界では超音速流出を仮定して0次の外挿条件を与えた。初期条件は1次元的な等エントロピー流とした。

一方、実際の解析において、上記定式化を従来スキームそのままで行うと放電開始時の急激な温度上昇や、散逸項によるスキームの不安定化によって数値計算は極めて不安定となる。従って計算にあたっては以下の点に注意して行う必要がある。

電磁場計算における緩和係数を低く設定する。

流体場計算におけるクーラン数を低く設定する。

初期条件は出来るだけ実際の物理現象を考慮して

取り扱う。

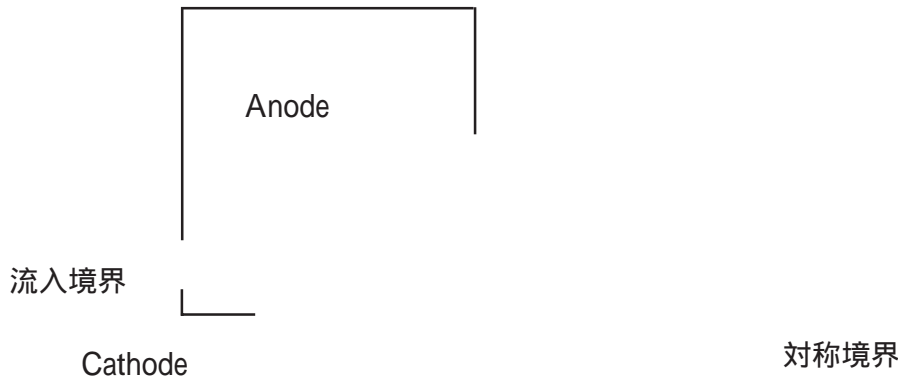


図2 計算格子

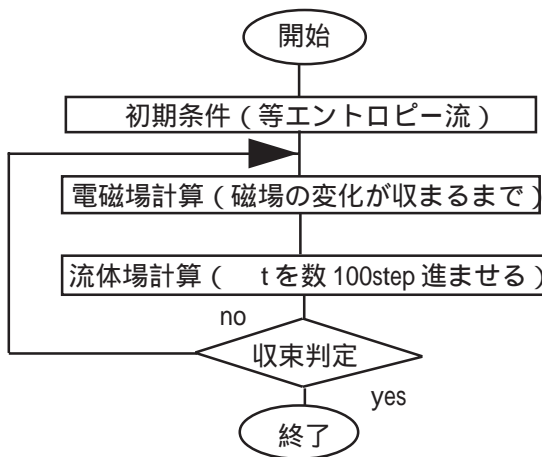


図3 解析フロー

#### 4. 解析結果および考察

流れが定常状態に達した時の等密度線図、等温度線図、等磁束密度線図を図4にそれぞれ示す。作動条件は印加電流が8 kA、質量流量が2.5g/secとした。図4において左側が従来の解析結果であり、右側が今回の散逸効果を考慮した解析結果である。なお、電気伝導度のみを考慮した時の温度、電流経路分布も示しておく。

等密度分布を見ると、従来の結果よりも強い衝撃波が見られる。この位置での衝撃波は、衝撃波の後面の圧力が前面の圧力よりも大きいときに起こる。圧力分布を見ると、確かに陰極先端付近に高圧部分を形成していた。また、密度においても、衝撃波の後側の陰極先端から下流にかけて高密度部分を形成しており、実験で見られる陰極ジェット(高温高密度分布)に対応しているように思われる。温度分布を見ると従来よ

りも非常に熱が拡散されているのがわかる。これは、熱伝導効果の影響である。陰極先端の温度を見ると、実験値とほぼ一致している。しかし、完全電離モデルの熱伝導係数は、電離過程を考慮した時の熱伝導係数よりも大きくなるため、熱が過大に拡散されすぎている。また境界層を細かくとっていないため粘性による運動量から熱エネルギーへの変換過程が正確に解析出来ていない。電気伝導度のみを考慮したときの分布を見ると温度が低下しているが、これは温度に応じた電気伝導度が与えられたことによるものである。

等磁束密度分布を見ると、あまり変化は見られない。しかし、電気伝導度のみを可変にしたときは電流が陰極先端から下流にかけて温度に応じて引っ張られている。これは、電気伝導度を可変にするだけでは陰極先端付近の温度が十分に下がらないので、その分過大な電気伝導度が与えられたためである。

粘性項の有無によるトータル推力を比較すると、粘性を考慮したほうが、推力が0.5%ほど低くなっていた。これは、スラスタ内部全体の粘性効果によって粒子の運動量が熱エネルギーに変換されたことによると考えられる。なお、磁気マッハ数分布における大きな違いはみられなかった。

#### 参考文献

- [1] 本間、岡崎 「熱拡散を考慮したMPDスラスタ解析」平成8年度宇宙輸送シンポジウム講演集、pp.189-192
- [2] H.W.Liepmann and A.Roshko (玉田 訳)「気体力学」(吉岡書店) 1956

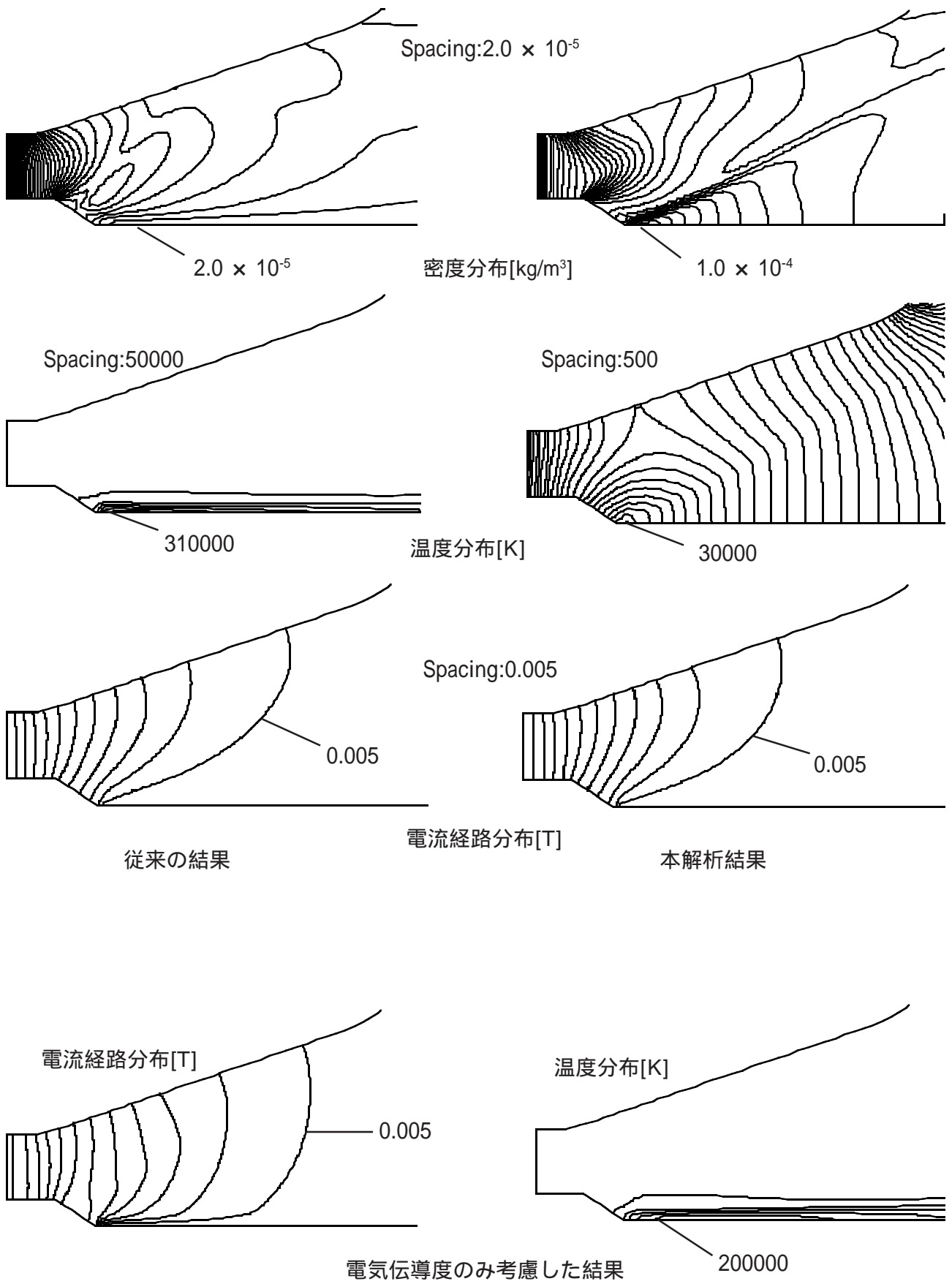


図4 解析結果 (8kA, 2.5g/sec)