

RTK-GPS 測位計算アルゴリズム —FLOAT 解—

東京海洋大学 富永 貴樹

1. はじめに

GPS 測量を行う際、実時間で測位結果を得ることが出来るのは今のところ RTK-GPS 測位のみである。GPS 測量では GPS 衛星からの搬送波位相データを使用するため、整数値バイアスを決定しなければならず、これが測位計算を複雑にしている所以である。この整数値バイアスを決定するための1つの方法として「FLOAT 解」による測位がある。ここではその「FLOAT 解」について解説する。その過程の中で搬送波位相データ、2重位相差についても記述する。式の展開等を若干詳しく解説するため、経験豊富で自信のある読者は読み飛ばしていただいて結構である。

2. 搬送波位相データおよび位相差

2.1 搬送波位相データ

RTK-GPS では搬送波位相データを用いる。受信機 A で測定された衛星 i からの搬送波位相データ Φ^i_A は、式(2.1)のように表される。

$$\Phi^i_A = \frac{f}{c} \rho^i_A + d^i + \delta_A + N^i_A \quad \dots(2.1)$$

ただし、

f	: 搬送波周波数
c	: 光速
ρ^i_A	: 受信機アンテナ A と衛星 i 間の真の距離
d^i	: 衛星 i の時計誤差による搬送波位相データ誤差
δ_A	: 受信機 A の時計誤差による搬送波位相データ誤差
N	: 整数値バイアス

である。ちなみに上側の添字は衛星、下側の添字は受信機アンテナのことである。また、本来であれば式(2.1)には電離層、対流圏、および受信機系の S/N 比等による誤差項も含まれるが、ここでは無視する。

2.2 1重位相差

1重位相差には、衛星間1重位相差と受信機間1重位相差の2つがあるが、次に述べる2重位相差を求めることでその意義は薄れてしまうため、ここでは受信機間1重位相差についてのみ述べる。ある時刻に受信機 A、B それぞれにおいて測定された衛星 i からの搬送波位相データを Φ^i_A 、 Φ^i_B とすると、式(2.1)から、受信機間1重位相差 $D\Phi^i_{AB}$ は式(2.2)のように表される。

$$\begin{aligned} D\Phi^i_{AB} &= \Phi^i_B - \Phi^i_A \\ &= \frac{f}{c} \rho^i_B + d^i + \delta_B + N^i_B - \frac{f}{c} \rho^i_A + d^i + \delta_A + N^i_A \quad \dots(2.2) \\ &= \frac{f}{c} \rho^i_{AB} + \delta_{AB} + N^i_{AB} \end{aligned}$$

2つの搬送波位相データ Φ^i_A 、 Φ^i_B に含まれていた衛星時計誤差項 d^i が、この計算により完全に消去される。しかし、

受信機時計誤差項の δ_{AB} が残ったままであるが、これをも消去するのが2重位相差である。

2.3 2重位相差

ある時刻に、衛星 i, j から送られてくる搬送波位相データを2台の受信機 A, B でそれぞれ測定する。このとき各受信機で測定された衛星 i からの搬送波位相データを Φ^i_A, Φ^i_B とし、同様に衛星 j からの搬送波位相データを Φ^j_A, Φ^j_B とすると、式(2.1)と式(2.2)から、2重位相差 $DD\Phi^{ij}_{AB}$ は式(2.3)のように表される。

$$\begin{aligned} DD\Phi^{ij}_{AB} &= \Phi^j_{AB} - \Phi^i_{AB} \\ &= \frac{f}{c} \rho^j_{AB} + \delta_{AB} + N^j_{AB} - \frac{f}{c} \rho^i_{AB} + \delta_{AB} + N^i_{AB} \quad \dots(2.3) \\ &= \frac{f}{c} \rho^j_{AB} - \frac{f}{c} \rho^i_{AB} + N^{ij}_{AB} \end{aligned}$$

式(2.2)に残っていた受信機時計誤差項の δ_{AB} が完全に消去されたことがわかる。

2重位相差では、GPS 測定の最大の誤差要因である衛星時計誤差、受信機時計誤差の双方が完全に消去されるため、精密測量を行う際の中心的な技術であると言える。

3. 測位計算アルゴリズム

この章では2重位相差を用いて FLOAT 解を求めるアルゴリズムを紹介する。

GPS では、中心が地球中心と一致した楕円体を基準にした、WGS-84 (World Geodetic System 1984 : 世界的測地系 1984) と呼ばれる座標系により測位計算が行われる。そして我々が普段使用する緯度、経度、および高さの座標に変換される。また、使用しているxyz3次元直交座標系は ECEF (Earth Centered Earth Fixed) と呼ばれており、これは地球中心を原点とし、自転軸方向をz軸(北極方向)、グリニッジ基準子午面と赤道が交わる方向をx軸、さらにこれら2軸と右手系をなすようにy軸を設定したものである。

各衛星からの搬送波の周波数が等しい(ドリフト無し)と仮定すると、式(2.3)はエポック t において次式をように表すことが出来る。

$$\begin{aligned} \frac{c}{f} DD\Phi^{ij}_{AB}(t) &= \{\rho^j_B(t) - \rho^j_A(t)\} - \{\rho^i_B(t) - \rho^i_A(t)\} + \frac{c}{f} N^{ij}_{AB}(t) \\ &\quad \dots(3.1) \\ \therefore \frac{c}{f} DD\Phi^{ij}_{AB}(t) + \{\rho^j_A(t) - \rho^i_A(t)\} &= \{\rho^j_B(t) - \rho^i_B(t)\} + \frac{c}{f} N^{ij}_{AB}(t) \end{aligned}$$

ここで、式(3.1)の未知数を整理しよう。ただし、受信機 A を基準局(参照地点)、受信機 B を移動局(未知点)とする。 $DD\Phi^{ij}_{AB}(t)$ は観測値であるため既知数である。 $\rho^i_A(t)$ と $\rho^j_A(t)$ も、受信機アンテナ A の位置と衛星位置が既知であるため、ピタゴラスの定理から既知数である。 $\rho^i_B(t)$ と $\rho^j_B(t)$ は未知であるが、衛星位置が既知であるため、未知数は移動局側の受信機アンテナ B の位置である。よって未知数は、整数値バイアス $N^{ij}_{AB}(t)$ と、受信機アンテナ B の位置 $(x_B(t), y_B(t), z_B(t))$ ということになる。つまり式(3.1)は、既知数を左辺、未知数を右辺に移項したものである。FLOAT 解は、これら未知数を連立方程式から求めようとする解法である。

次に、式(3.1)を用いて連立方程式を定義する。測位に使用する衛星数を m 個とし、衛星 1 を基準衛星とすると、エポック $t (\geq 1)$ において独立な2重位相差、すなわち独立な方程式が式(3.2)のように定義される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{f} DD\Phi^{12}_{AB}(t) + \{\rho^2_A(t) - \rho^1_A(t)\} = \{\rho^2_B(t) - \rho^1_B(t)\} + \frac{c}{f} N^{12}_{AB}(t) \\ \frac{c}{f} DD\Phi^{13}_{AB}(t) + \{\rho^3_A(t) - \rho^1_A(t)\} = \{\rho^3_B(t) - \rho^1_B(t)\} + \frac{c}{f} N^{13}_{AB}(t) \\ \frac{c}{f} DD\Phi^{14}_{AB}(t) + \{\rho^4_A(t) - \rho^1_A(t)\} = \{\rho^4_B(t) - \rho^1_B(t)\} + \frac{c}{f} N^{14}_{AB}(t) \\ \vdots \\ \frac{c}{f} DD\Phi^{1m}_{AB}(t) + \{\rho^m_A(t) - \rho^1_A(t)\} = \{\rho^m_B(t) - \rho^1_B(t)\} + \frac{c}{f} N^{1m}_{AB}(t) \end{array} \right. \dots(3.2)$$

式(3.2)で、未知数は整数値バイアス $\left(\frac{c}{f} N^{12}_{AB}(t), \frac{c}{f} N^{13}_{AB}(t), \dots, \frac{c}{f} N^{1m}_{AB}(t)\right)$ と受信機アンテナ B の位置 $(x_B(t), y_B(t), z_B(t))$ の $(m+2)$ 個であるが、方程式は $(m-1)$ 本であるため、式(3.2)だけでは解くことは出来ない。そこで、サイクルスリップが起これなければ整数値バイアスの値は不変であるという性質を活かし、エポック0においても式(3.2)と同様な方程式を式(3.3)のように定義する。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{f} DD\Phi^{12}_{AB}(0) + \{\rho^2_A(0) - \rho^1_A(0)\} = \{\rho^2_B(0) - \rho^1_B(0)\} + \frac{c}{f} N^{12}_{AB}(t) \\ \frac{c}{f} DD\Phi^{13}_{AB}(0) + \{\rho^3_A(0) - \rho^1_A(0)\} = \{\rho^3_B(0) - \rho^1_B(0)\} + \frac{c}{f} N^{13}_{AB}(t) \\ \frac{c}{f} DD\Phi^{14}_{AB}(0) + \{\rho^4_A(0) - \rho^1_A(0)\} = \{\rho^4_B(0) - \rho^1_B(0)\} + \frac{c}{f} N^{14}_{AB}(t) \\ \vdots \\ \frac{c}{f} DD\Phi^{1m}_{AB}(0) + \{\rho^m_A(0) - \rho^1_A(0)\} = \{\rho^m_B(0) - \rho^1_B(0)\} + \frac{c}{f} N^{1m}_{AB}(t) \end{array} \right. \dots(3.3)$$

式(3.2)および式(3.3)双方を用いると、未知数の数は変わらず $(m+2)$ 個であるが、方程式は $(2m-2)$ 本となるため、 $m \geq 4$ のとき、すなわち測位に使用する衛星数が4以上のときにすべての未知数を求めることができるのである。3次元のアンテナ位置を求めるためには測位に使用する衛星は最低4つ必要であるということは、理由こそ違えど GPS の単独測位と通ずる点である。

次に、実際の解法を述べる。基準衛星1と衛星 m における式(3.2)をもう少し丁寧に表すと、式(3.4)のようになる。

$$\frac{c}{f} DD\Phi^{1m}_{AB}(t) + \{\rho^m_A(t) - \rho^1_A(t)\} = \left\{ \sqrt{(x_B(t) - x^m(t))^2 + (y_B(t) - y^m(t))^2 + (z_B(t) - z^m(t))^2} \right. \\ \left. - \sqrt{(x_B(t) - x^1(t))^2 + (y_B(t) - y^1(t))^2 + (z_B(t) - z^1(t))^2} \right\} + \frac{c}{f} N^{1m}_{AB}(t) \dots(3.4)$$

式(3.4)から、式(3.2)および式(3.3)は線形ではないことがわかり、そのため簡単に解くことができない。そこで、GPS の単独測位と同様に未知数を近似値と修正値の和で表し、繰り返し計算によって未知数を求めるといった手法がとられる。

エポック t における n 回目の逐次演算後のアンテナ位置を $(x_{B,n}(t), y_{B,n}(t), z_{B,n}(t))$ 、対する修正値をそれぞれ $\Delta x_{B,n}(t), \Delta y_{B,n}(t), \Delta z_{B,n}(t)$ とし、さらに整数値バイアス N に対する修正値 ΔN とすると、式(3.5)のような関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} x_{B,n+1}(t) = x_{B,n}(t) + \Delta x_{B,n}(t) \\ y_{B,n+1}(t) = y_{B,n}(t) + \Delta y_{B,n}(t) \\ z_{B,n+1}(t) = z_{B,n}(t) + \Delta z_{B,n}(t) \\ N^{12}_{AB,n+1}(t) = N^{12}_{AB,n}(t) + \Delta N^{12}_{AB,n}(t) \\ N^{13}_{AB,n+1}(t) = N^{13}_{AB,n}(t) + \Delta N^{13}_{AB,n}(t) \\ \vdots \\ N^{1m}_{AB,n+1}(t) = N^{1m}_{AB,n}(t) + \Delta N^{1m}_{AB,n}(t) \end{cases} \quad \dots(3.5)$$

$n = 0$ のときには、 $(x_{B,n}(t), y_{B,n}(t), z_{B,n}(t))$ と整数値バイアス N に適当に初期値を与えればよい。

式(3.5)の値を式(3.4)に代入し、テーラー展開を行い、さらに修正値が微小であることから2次以上の項を無視すると、式(3.6)のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{c}{f} DD\Phi^{1m}_{AB}(t) + \{\rho^m_A(t) - \rho^1_A(t)\} - \{\rho^m_{B,n}(t) - \rho^1_{B,n}(t)\} - \frac{c}{f} N^{1m}_{AB,n}(t) \\ &= \frac{(x_{B,n}(t) - x^m(t)) \cdot \Delta x_{B,n}(t) + (y_{B,n}(t) - y^m(t)) \cdot \Delta y_{B,n}(t) + (z_{B,n}(t) - z^m(t)) \cdot \Delta z_{B,n}(t)}{\sqrt{(x_{B,n}(t) - x^m(t))^2 + (y_{B,n}(t) - y^m(t))^2 + (z_{B,n}(t) - z^m(t))^2}} \quad \dots(3.6) \\ &- \frac{(x_{B,n}(t) - x^1(t)) \cdot \Delta x_{B,n}(t) + (y_{B,n}(t) - y^1(t)) \cdot \Delta y_{B,n}(t) + (z_{B,n}(t) - z^1(t)) \cdot \Delta z_{B,n}(t)}{\sqrt{(x_{B,n}(t) - x^1(t))^2 + (y_{B,n}(t) - y^1(t))^2 + (z_{B,n}(t) - z^1(t))^2}} + \frac{c}{f} \Delta N^{1m}_{AB,n}(t) \end{aligned}$$

実際には測位に使用する衛星数が m 個であるため、式(3.6)のような方程式が $(2m - 2)$ 本できる。それを表現するために、次のような行列をとる。

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{12}(0) & \beta_{12}(0) & \gamma_{12}(0) & \frac{c}{f} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{13}(0) & \beta_{13}(0) & \gamma_{13}(0) & 0 & \frac{c}{f} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1m}(0) & \beta_{1m}(0) & \gamma_{1m}(0) & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{c}{f} \\ \alpha_{12}(t) & \beta_{12}(t) & \gamma_{12}(t) & \frac{c}{f} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{13}(t) & \beta_{13}(t) & \gamma_{13}(t) & 0 & \frac{c}{f} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{1m}(t) & \beta_{1m}(t) & \gamma_{1m}(t) & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{c}{f} \end{bmatrix}$$

$$\delta DD = \begin{bmatrix} \Delta DD^{12}_{AB}(0) \\ \Delta DD^{13}_{AB}(0) \\ \vdots \\ \Delta DD^{1m}_{AB}(0) \\ \Delta DD^{12}_{AB}(t) \\ \Delta DD^{13}_{AB}(t) \\ \vdots \\ \Delta DD^{1m}_{AB}(t) \end{bmatrix}, \quad \delta \chi = \begin{bmatrix} \Delta x_{B,n}(t) \\ \Delta y_{B,n}(t) \\ \Delta z_{B,n}(t) \\ \Delta N^{12}_{AB,n}(t) \\ \Delta N^{13}_{AB,n}(t) \\ \vdots \\ \Delta N^{1m}_{AB,n}(t) \end{bmatrix} \quad \dots (3.7)$$

ただし、

$$\Delta DD^{1m}_{B,n}(t) = \frac{c}{f} DD \Phi^{1m}_{AB}(t) + \{\rho^m_A(t) - \rho^1_A(t)\} - \{\rho^m_{B,n}(t) - \rho^1_{B,n}(t)\} - \frac{c}{f} N^{1m}_{AB,n}(t)$$

$$\alpha_{1m}(t) = \frac{(x_{B,n}(t) - x^m(t))}{\sqrt{(x_{B,n}(t) - x^m(t))^2 + (y_{B,n}(t) - y^m(t))^2 + (z_{B,n}(t) - z^m(t))^2}} \\ - \frac{(x_{B,n}(t) - x^1(t))}{\sqrt{(x_{B,n}(t) - x^1(t))^2 + (y_{B,n}(t) - y^1(t))^2 + (z_{B,n}(t) - z^1(t))^2}}$$

$$\beta_{1m}(t) = \frac{(y_{B,n}(t) - y^m(t))}{\sqrt{(x_{B,n}(t) - x^m(t))^2 + (y_{B,n}(t) - y^m(t))^2 + (z_{B,n}(t) - z^m(t))^2}} \\ - \frac{(y_{B,n}(t) - y^1(t))}{\sqrt{(x_{B,n}(t) - x^1(t))^2 + (y_{B,n}(t) - y^1(t))^2 + (z_{B,n}(t) - z^1(t))^2}}$$

$$\gamma_{1m}(t) = \frac{(z_{B,n}(t) - z^m(t))}{\sqrt{(x_{B,n}(t) - x^m(t))^2 + (y_{B,n}(t) - y^m(t))^2 + (z_{B,n}(t) - z^m(t))^2}} \\ - \frac{(z_{B,n}(t) - z^1(t))}{\sqrt{(x_{B,n}(t) - x^1(t))^2 + (y_{B,n}(t) - y^1(t))^2 + (z_{B,n}(t) - z^1(t))^2}}$$

である。

行列群(3.7)では次のような関係式が成立する。

$$\delta DD = \alpha \cdot \delta \chi \quad \dots (3.8)$$

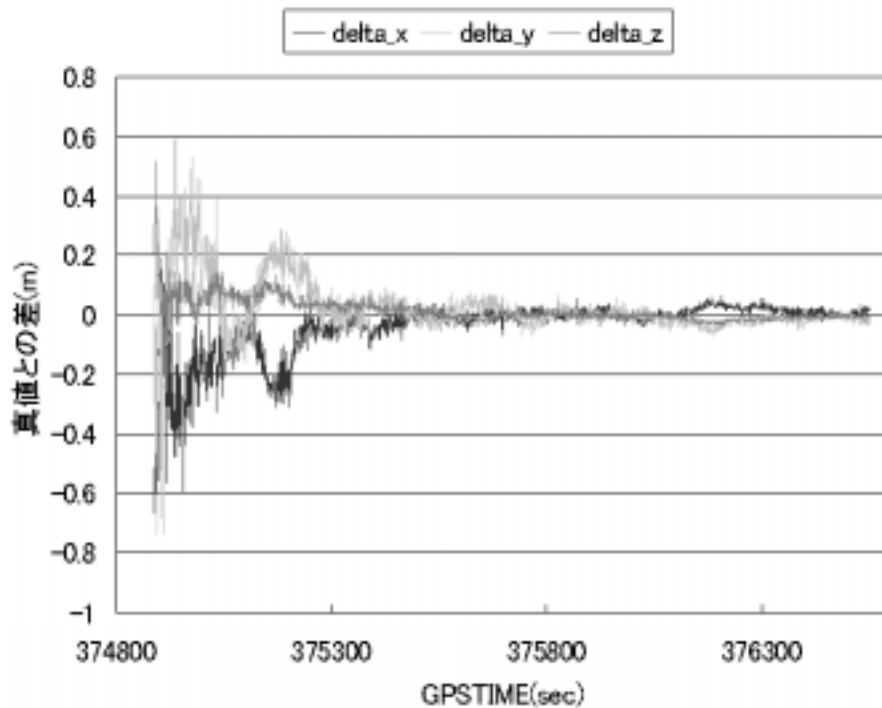
測位に使用する衛星数が4つの場合は式(3.8)の両辺に左から α の逆行列をかけることにより修正量が求められるが、測位に使用する衛星数が5つ以上の場合、 α が正規行列ではないために直接逆行列を求めることは出来ない。線形の連立方程式で未知数よりも方程式の数の方が多く場合は、最小2乗法を用いて解を求めることが出来る。すなわち、式(3.9)を用いて計算する。

$$\delta \chi = [\alpha^T \cdot \alpha]^{-1} \cdot \alpha^T \cdot \delta DD \quad \dots (3.9)$$

式(3.9)を、たとえば $\Delta x_{B,n}(t) \leq 1cm, \Delta y_{B,n}(t) \leq 1cm, \Delta z_{B,n}(t) \leq 1cm$ となるまで繰り返し計算することで解が求められるのである。

4. 実データによる測位結果

図(4.1)は、東京海洋大学海洋工学部航海学科実習棟屋上の2つのアンテナをから取得したデータを用いて実際に求めた FOLAT 解のxyz3 方向の真値との差である。受信機は共に Novatel 社製 RT-2 受信機で、基線長はおよそ10mである。時間がたつごとに値が真値に近いていくことがわかる。



図(4.1): 測位結果と真値との誤差

5. まとめ

生まれて初めて RTK-GPS が出来てよかった。