

卒業論文

**LAMBDA 法による
アンビギュイティ決定に関する研究**

平成 17 年度

(2005)

東京海洋大学

商船学部 流通情報工学課程

2002726 富永麗司

指導教官 安田明生 教授

目次

第 1 章 序論

1-1	研究の背景	1
1-2	GPS の概要	2
1-3	研究の目的	4

第 2 章 GPS 測位の基礎

2-1	単独測位	5
2-1-1	測位原理	5
2-1-2	測位計算	6
2-2	測位誤差と補正	10
2-2-1	衛星位置	10
2-2-2	衛星クロック	11
2-2-3	電離圏・対流圏遅延	12
2-2-4	マルチパス	20
2-2-5	受信機雑音	20

第 3 章 逐次的最小 2 乗法による GPS 単独測位

3-1	はじめに	21
3-2	測位計算	21
3-3	実験結果	23

第 4 章 干渉測位

4-1	測位原理	26
4-2	測位計算	26
4-2-1	搬送波位相とアンビギュイティ	26
4-2-2	搬送波位相誤差項の削除	27
4-2-2-1	一重位相差	27
4-2-2-2	二重位相差	29
4-2-2-3	線形結合	30
4-3	FLOAT 解アルゴリズム	31
4-4	FIX 解アルゴリズム	35

第5章 LAMBDA法による

アンビギュイティ決定に関する研究

5-1	はじめに	37
5-2	LAMBDA法	37
5-3	LAMBDA法を用いた干渉測位実験	40
5-3-1	実験概要	40
5-3-2	測位結果	42
5-3-2-1	アンビギュイティ探索空間	42
5-3-2-2	アンビギュイティ決定	44
5-3-2-3	測位誤差	46
5-4	まとめ	49

第6章 総括

6-1	結論	50
6-2	今後の課題	51

第1章 序論

1-1 研究の背景

GPS(Global Positioning System)は人工衛星による位置決定システムである。1970年代の初頭に、米国国防総省 USDOD(United States Department of Defense)により地球上いつでもどこでも実時間の連続測位が可能なシステムを目指し開発が開始され、1995年に本格的な完成が達成された。

2000年5月2日13時(JST)まで選択利用性(SA : Selective availability)と呼ばれる測位精度を劣化させる操作がなされており、その精度は単独測位では水平方向で約100mであった。測位精度を上げるために、種々の補正システムが世界中で運用されている。現在では、SAが解除され、GPS測位の精度は受信機、アンテナ等の周辺機器の進歩により大幅に改善されている。

また、今日では、カーナビゲーションや携帯電話の普及により、「GPS」は一般的な言葉になりつつあるように感じる。GPSは、GPS衛星からの信号を受信することによって、高い精度で位置や時刻が決定でき、船舶や航空機の航法装置、飛翔体の姿勢検地、車両の位置管理や経路案内、土木工事や水上作業の測量、地殻変動の観測、構造物の歪みや揺れ検知、電離層観測、通信や天体観測の時刻同期など、把握しきれないほど様々な用途で広く利用されている。これは、実時間で高精度な測位を行うことが出来るため、日常生活や、さらには安全の視点からも非常に使い勝手がよいからではないかと考えられる。

しかし一方では、更なる測位精度の向上が要求されているのも事実である。cmレベルでの測位が可能な搬送波位相を利用する干渉測位においては、アンビギュイティ(ambiguity)決定は1番の問題点であると言え、無視することの出来ない大きな誤差要因である。

衛星数	4個×6軌道面
軌道半径	26,561km
周回周期	約11時間58分2秒 (約0.5恒星時)
軌道傾斜角	55°
搬送波周波数	L1=1,575.42Hz (154×10.23MHz) L2=1,227.60Hz (120×10.23MHz)
コードの種類	ゴールド符号
測地系	WGS-84

表 1-1 : GPS 衛星の主要緒元

1-2 GPSの概要

表 1-1 に GPS 衛星の主要緒元を記す。GPS 衛星は、高度約 20,000km の軌道を周回し、軌道面は赤道から傾斜角 55° 、各軌道間隔 60° で、全てで 6 軌道ある。各軌道に 4 衛星ずつの計 24 衛星で運用するとされている。図 1-1 に GPS 衛星の軌道概念図を記す。現在(2006 年 1 月)では、28 機の GPS 衛星が使用可能である。各衛星の周回の周期は約 11 時間 58 分 2 秒(約 1/2 恒星日)で、1 年で同じ配置に戻るよう制御されているようである。実際には、衛星軌道は随時変更されており完全には決定されていないが、衛星の軌道は 2m の範囲で地上のモニター局で管理され、2 時間間隔で更新される高い精度を持った軌道情報(Ephemeris)を 30 秒周期で、対応した衛星が放送している。

各衛星は10.23MHzの基準発信機を搭載しており、154倍のL1=1575.42MHzと、120倍のL2=1227.60MHzの2周波の右旋円偏波を全地球に向けて送信している。信号は全衛星同一の周波数を用いてC/AコードとPコードとともに、衛星ごとに異なるゴールドコードと呼ばれる擬似ランダム雑音(PRN : Pseudo Random Noise)でBPSK(Bi-Phase Shift Key : 2相位相変調)変調されている。具体的に、GPS衛星からコードに載せられて送信されるデータは、衛星軌道情報(Ephemeris)、衛星時計の補正值、電離層補正パラメータ、全衛星の位置情報(almanac)等である。

また、GPS では、GPS タイムというものがあり、GPS タイムは1週間で1回りするようになっており、この時刻のもとに運用されている。各衛星には、セシウム、ルビジウム原子時計が搭載されており、この原子時計は地上の管制システムで管理され、この補正情報を軌道情報とともに衛星が放送している。また世界標準時として UTC が知られているが、UTC と GPS タイムの違いも管理されている。

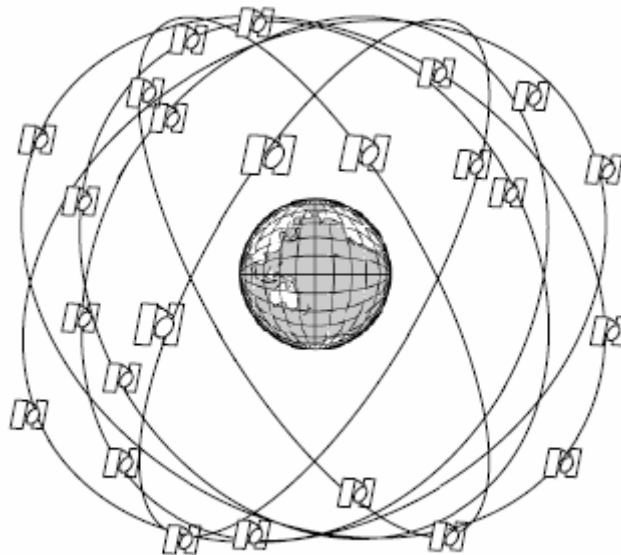


図 1-1 : GPS 衛星軌道概念図

・GPS測位の誤差要因

GPS測位における誤差を引き起こす要因はいくつか存在しており、GPS衛星位置に関する誤差要因と擬似距離に関する誤差要因の大きく2種類に分別される。

GPS衛星位置に関する誤差は、実際のGPS衛星位置と衛星軌道情報(Ephemeris)を利用して計算した位置が異なることによって生じる。また太陽の輻射圧力による摂動等で衛星運動の乱れによる誤差もある。

擬似距離に関する誤差には、電離圏、対流圏による遅延誤差やGPS信号が建築物等の反射物に反射し、直接波に干渉を起こすマルチパスの電波伝搬経路誤差がある。また擬似距離はアンテナがGPS信号を受信した時刻と信号送信時刻の差に光速を乗ずることで算出する。この算出法では送信側と受信側の時計が完全に一致していなければならないが、GPS衛星時計と受信機時計が一致していないために時計誤差が生じ、正しい距離を求めることができない。

DGPS測位、干渉測位は基準局側の補正データ等を利用し、利用者側の測位誤差要因を相殺することによって測位精度を向上させている。

1-3 研究の目的

GPS測位における相対測位の中で、mm～cmレベルでの高精度測位が可能な搬送波位相を利用する相対測位において、Ambiguity決定がその中心課題として挙げられる。Ambiguity決定に関しては現在まで様々な工夫された手法が開発されてきたが、その中でも特にAmbiguity決定に有効とされるLAMBDA法(Least-square Ambiguity Decorrelation Adjustment Method)について調査し、Ambiguityに対するfloat推定値の探索空間とLAMBDA法の適用によるAmbiguity探索空間の違いと、基線長との関係性を示すとともに、測位結果にどの程度の影響を与えるのかを示すことが本研究の目的である。

第2章 GPS測位の基礎

2-1 単独測位

2-1-1 測位原理

GPS 衛星による単独測位は、GPS のもっとも基本的な利用方法であり、全世界で、宇宙、航空、海上、地上(地中と水中は無理であるが)のどこでも、随時、1秒またはそれ以下の時間に現在地を知ることができる技術で、単純な原理である。GPS では、WGS-84 座標系により、緯度、経度および高さが計算されるようになっている。

GPS による測位は、利用者と衛星間の距離を測定することによって行う。宇宙空間における人工衛星 3 個のそれぞれの位置が分かっているならば測位が可能となる。図 2-1 のように、衛星上の原子時計によって正確なタイミングで発信されている測位用の符号 C/A コードまたは P コードが受信機に到達するまでにどれだけ時間がかかったかを測定して求める。理想的な場合として、もしも受信機時計が衛星時計と完全に同期していれば、その所要時間(伝搬時間)がわかる。

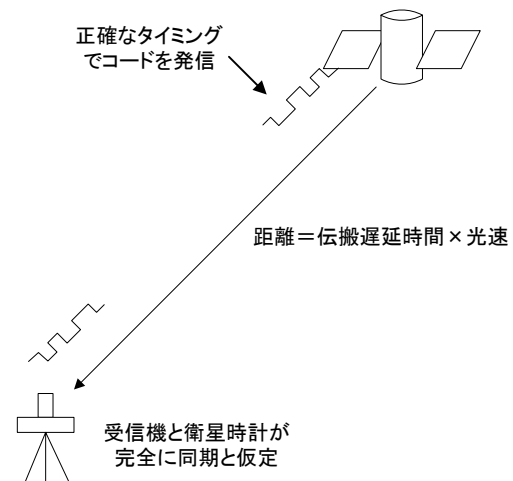


図 2-1：理想的な場合のコードによる距離測定

しかしながら、受信機時計と衛星時計を完全に同期させることはほとんど不可能である。それは、衛星時計は原子時計と搭載し、正確に時刻を刻むのに対し、受信機時計は衛星時計と比較して精度が悪く、2つの時計は一致、同期していない。この受信機内の時計誤差は測定した全ての衛星に対して等しいので、1つの未知数と考える。実際の場合、図 2-2 で記したように、受信機時計によってコードの到達時間を計算して形式的に距離を求める。これによって得られた距離は時間誤差と真の距離との和で、この距離のことを擬似距離(Pseudo range)という。この擬似距離の問題から、実際の単独測位を行う際、3機の衛星からできる3つの方程式では測位位置を求めることができない。それは、偉

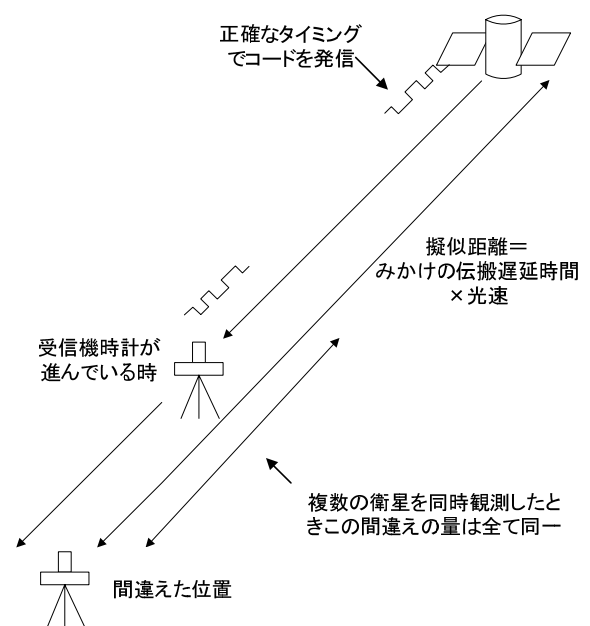


図 2-2：実際の場合のコードによる距離測定

度、経度および高さの3次元座標の成分(x, y, z)の3つの未知数と、受信機内の時計誤差 Δt を求めることになるので、実際単独測位を行うためには、図2-3のように最低4機の衛星を同時に観測し、4つの方程式を作成することが必要となる。この4つの方程式を解くことにより測位解を得ることが出来る。

単独測位の測位精度は、SAが発動されていた時期は、時間帯によっては65~100mであったが、SAが解除された後は6~10mまでに改善された。ただし、電波伝搬を遮断するような障害物によって受信できない衛星があると、見かけ上衛星の配置が悪くなり、市街地などではそれ以下の精度となることがあるので注意が必要である。

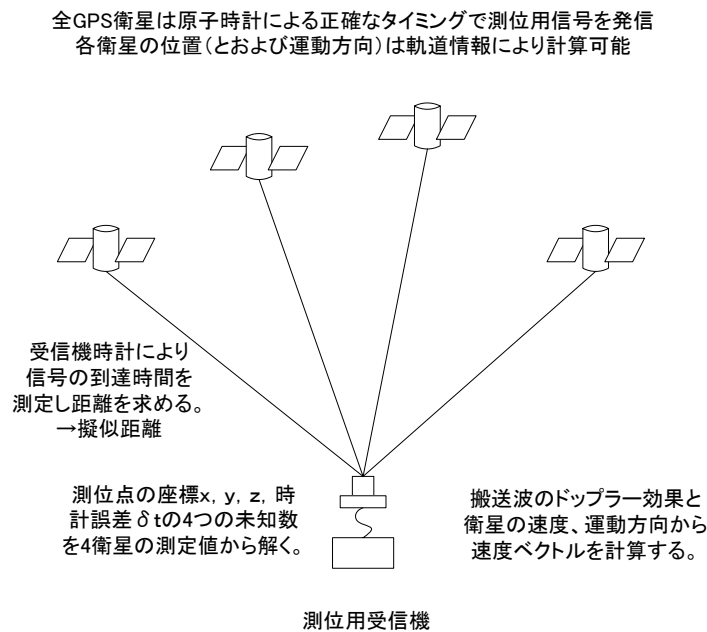


図2-3：単独測位

2-1-2 測位計算

単独測位の測位計算は、受信機で測定された各衛星位置との擬似距離をもとにして行う。4機のGPS衛星の位置は、軌道情報から計算される。位置表現に用いられている3次元直行座標系は、ECEF(Earth Centered Earth Fixed)と呼ばれ地球の中心を原点、地球自転軸に沿って北方向を正方向とするZ軸、グリニッジ子午面と赤道面との交点方向にX軸、これら2軸と右手系をなすようにY軸を選ぶものである。

測位を行うために、利用者の位置座標を、 (x_0, y_0, z_0) とする。また、信号を送信したi番衛星の位置座標を (x_i, y_i, z_i) とする。衛星-利用者間の正確な距離は、ピタゴラスの定理より、

$$\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2} = c \times (\tau_i + \partial\tau) \quad (2.1)$$

ここで、 τ_i は、測定で得られた i 番目の衛星の電波伝搬時間であり、 $\partial\tau$ は受信機時計のずれ(正しい時刻より送れている場合を正とする)で、 c は光の速度であり、この式(2. 1)の関係が観測されている衛星全てについて成り立つ。また、観測点・衛星からの真の距離を r_{0i} とおく。

幾何学的には、 (x_i, y_i, z_i) と中心とした半径が $c \times (\tau_i + \partial\tau)$ の3球面の交点として側点が求められる。

実際上の(2. 1)式を解くことは、2乗や平方根があり、うまく解くことはできない。そこで、未知数を近似値と補正量の和で表し、最小2乗法を使用して解く方法がとられる。

i 番衛星とアンテナ位置との距離(擬似距離) r_i は、

$$r_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2} \quad (2. 2)$$

と表すことができる。また、未知数をその近似値と補正量の和で表すと、

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \Delta x \\ y_n &= y_{n-1} + \Delta y \\ z_n &= z_{n-1} + \Delta z \end{aligned} \quad (2. 3)$$

と表すことができ、これを式(2. 1)に代入すると、

$$r_i = r_{n,i} + \frac{\partial r_i}{\partial x_i} \times \Delta x + \frac{\partial r_i}{\partial y_i} \times \Delta y + \frac{\partial r_i}{\partial z_i} \times \Delta z + s \quad (2. 4)$$

ここで s は受信機時計誤差であり、ここで出てくる $\partial r / \partial x$ 、 $\partial r / \partial y$ 、 $\partial r / \partial z$ は、次の式のようになり、それぞれの衛星方向のベクトルの x 、 y 、 z 方向への射影(方向余弦)となっていることがわかる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x - x_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y - y_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z - z_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \end{aligned} \quad (2. 5)$$

ここで、 $\alpha = \partial r / \partial x$ 、 $\beta = \partial r / \partial y$ 、 $\gamma = \partial r / \partial z$ とおき、 $\Delta r = r_n - r_{n-1}$ とおくと、 i 番目の衛星からの擬似距離の補正量 Δr は、

$$\Delta r_i = \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z + \Delta s \quad (2.6)$$

となり、以下の4衛星分の4個の方程式ができる。ここで Δs は $c\partial\tau$ を意味する。

$$\begin{pmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_3 \\ \Delta r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 1 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta s \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

具体的な計算方法は、最初に x_0, y_0, z_0 を式(2.2)に代入し近似距離 r_i を求める。実測された4衛星に対する擬似距離の差を Δr_i として、式(2.7)に代入して $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta s$ を求める。これらの値から、初期値である x_0, y_0, z_0 にそれぞれ加え、新しい初期値 x_0, y_0, z_0 を作成する。作成した初期値を式(2.2)に代入して新しい擬似距離 r_i を求め、新しい擬似距離との差 Δr_i を用いて新しい $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta s$ を求める。以上の計算を補正量が十分小さくなるまで繰り返し行うことで、利用者位置座標と、受信機時計誤差を求めることができる。

また、実際の計算では、衛星が4個ではなく、4個以上見えている。取り扱いを容易にするために行列式で表現すると、式(2.7)は、

$$\begin{pmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_3 \\ \vdots \\ \Delta r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta s \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

と表される。

$$\delta R = \begin{pmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_3 \\ \vdots \\ \Delta r_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & 1 \end{pmatrix} \quad \delta x = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta s \end{pmatrix}$$

とする式(2.8)は、

$$\delta R = A \cdot \delta X \quad (2.9)$$

となる。実際、この式(2.9)の右辺には、誤差 ε_i が含まれているので、式(2.9)は、

$$\delta R = A \cdot \delta X + \varepsilon \quad (2.10)$$

となる。ここで、 ε は、 $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ とする。

そこで、この誤差 ε_i の2乗和を最小にするように解を決定するといった最小2乗法がここで適用される。最小2乗解の導出過程は、まず、式(2.10)を、

$$\varepsilon = \delta R - A \cdot \delta X \quad (2.11)$$

と書き直す。すると、誤差 ε の2乗和 f は、

$$\begin{aligned} f &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 \\ &= \varepsilon^T \cdot \varepsilon \\ &= (\delta R - A \cdot \delta X)^T (\delta R - A \cdot \delta X) \\ &= \delta R^T \cdot \delta R - 2\delta R^T \cdot A \cdot \delta X + \delta X^T (A^T \cdot A) \delta X \end{aligned} \quad (2.12)$$

で表せる。ここで、 T は転置行列を示す。 f を最小にするために変数 δX で偏微分して極値を求めると、

$$\partial f / \partial \delta X = -2\delta R^T \cdot A + 2\delta X^T (A^T \cdot A) = 0$$

$$\delta X^T (A^T \cdot A) = \delta R^T \cdot A$$

となり、両辺の転置をとり、 $(AB)^T = B^T A^T$ という性質と、 $(A^T A)$ が対称行列であることから、

$$(A^T \cdot A) \delta X = A^T \cdot \delta R \quad (2.13)$$

となる。次に、両辺に A と A^T を掛けた行列の逆行列を掛け、 δX について解くと、

$$\delta X = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot \delta R \quad (2.14)$$

となり、最小2乗解が得られ、補正量 $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta s$ を求めることができる。

2-2 測位誤差と補正

2-2-1 衛星位置

GPS測位時に衛星の位置に誤差があると、直接的に測位誤差になって現れることがある。GPS衛星の軌道は、地上の制御部で監視されて正確に予測され、各衛星に送られる。衛星は航法メッセージとして軌道情報を地上に送信しているが、数mから10m程度の誤差を避けることが出来ない。GPS衛星軌道情報はエフェメリス(Ephemeris)データと呼ばれている。エフェメリスデータは各衛星とも約2時間で更新され、更新されてから時間の経過とともに信頼度が低下する。図2-4に衛星軌道誤差の実例を示す。図2-4の誤差は、エフェメリスデータから計算した位置と、IGS(International GPS Service)という国際機関が作成した精密軌道暦の衛星位置との差である。経過時間が2時間を過ぎたあたりから誤差が大きくなる様子がわかる。

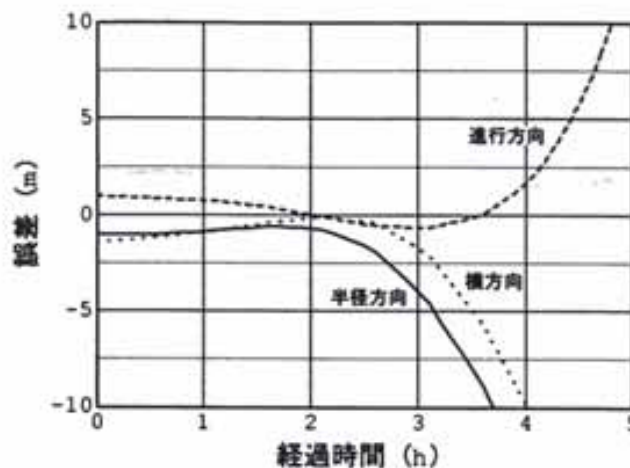


図 2-4 衛星軌道誤差

衛星位置誤差にはエフェメリスデータ誤差のほかに、GPS衛星自体の運動を乱し、衛星位置誤差を生じさせる要因がある。図2-5にGPS衛星に働く力をまとめて示す。GPS衛星の運動は基本的には、地球も質点とみなした時の楕円運動である。この質点の引力の他に、当然のことながら小さいけれども無視できない力(摂動力)が働いて、衛星に加速度(摂動)が生じる。地球重力の高次項による摂動は、地球を質点と近似したことによる残りの重力場であり、一番大きい項は地球の形状が赤道方向に扁平であることに対応している。2日間で約20m、数時間では数mと言われている。

月と太陽による摂動は、 $5 \times 10^{-6} m/s^2$ 程度の加速度であり、数時間で軌道が10m~100mほど移動すると言われている。地球以外の惑星の影響は無視できる。地球の潮汐現象によって生じる重力場の変化に伴う摂動もある。GPS衛星への影響は地球現象、海洋潮汐ともほぼ同程度であり、衛星の位置のずれは、2日間で0.5~1m程度である。したがって、両方合わせると2日間で1~2mの影響を受ける計算になる。

太陽光の輻射圧力による摂動は、太陽光が直接衛星に当たることによる輻射圧と、地球からの照り返し(アルベド)をうけることによる輻射圧の摂動がある。GPS衛星の形状は複雑であるので、これによる摂動力の見積もりは難しい。また、直接照射の影響は2日間で100m~800m、数時間で数mとかなり大きいものになる。これらの摂動による衛星位置誤差はエフェメリスデータ中に摂動の補正項が存在し、補正されるため数mに抑えられている。衛星軌道誤差による測位精度に対する影響は視線方向(利用者位置とGPS衛星を結ぶ方向)の位置誤差が問題となり、これと直行する方向の誤差は影響しない。GPS衛星はそれほど細かい振動をすることはないため、衛星軌道の予測誤差は周期の長いバイアス性となる。

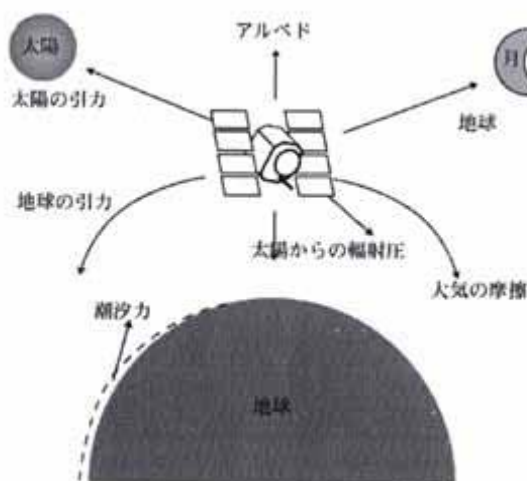


図 2-5 GPS衛星に働く力

2-2-2 衛星クロック

GPS衛星には、時刻同期用の正確な発信機としてセシウム原子時計が搭載されている。精度は 10^{-13} 程度といわれているが、1日の間には 10^{-8} 秒程度の時刻誤差を生じる。距離に換算すると約3mであるため補正を行わなければならない。地上のモニター局の受信機で、時計の同期誤差を連続的に監視し、1日に1度は時計の補正データを各衛星に送信して、航法メッセージの一部として衛星が送信している。

送信されるGPS衛星クロック補正係数 $a_{f_0}, a_{f_1}, a_{f_2}, t_0$ は衛星が送信してくる時刻を補正するために用いられる。衛星クロック補正值 Δt は、

$$\Delta t = a_{f0} + a_{f1}(t - t_0) + a_{f2}(t - t_0)^2 \quad (2.15)$$

で与えられる。ここで t は対象とする時刻、 t_0 は元期(基準時刻)、 a_{f0} は時刻のオフセット、 a_{f2} は原子周波数標準の周波数の変化率である。補正により時刻の誤差は1ns(30cm)程度に抑えられる。セシウム発信機は短期間には安定した挙動を示すから、衛星クロック誤差は周期の長いバイアス性の成分となる。

2-2-3 電離圏・対流圏遅延

GPS衛星の電波は衛星から発射されると、まず電離圏を通過する。この後、地表に達する直前に対流圏を通過する。電離圏と対流圏を通過する際にGPSの電波の速度が変化する。これにより、衛星までの距離測定に誤差を生じることになる。

電離圏と太陽活動

地球の表面は大気で覆われている。その密度は地表付近で約 $1\text{kg}/\text{m}^3$ で、上空へ行くほど希薄になる。500kmの高度では 10^{-12} 程度に減少する。地球から高さが100kmで、非常に希薄な大気層が太陽からの紫外線やX線により電離した状態になっている領域を、電離圏(Ionosphere)という。電離圏は下から上に、D層、E層、F1層、F2層と呼ばれる4種類の層がある。一般に短波と呼ばれる波長が10~100m位の電波は、F1層またはF2層で反射されるため、遠くまで送信することができる。これよりも高い周波数(波長の短い)電波は、電離圏では反射されないため、そのまま突き抜け宇宙空間まで出て行く。そのため、人工衛星との通信には超短波(VHF: Very High Frequency)や極超短波(UHF: Ultra High Frequency)を用いる必要がある。

4種類の層に分類される層の中で、GPS信号に影響を及ぼしているものは、電子密度の高いF2層である。これらの層以外にスプラディックE層(Sporadic E)が時々現れる。

中性の大気を電子とイオンに分解するのは主に、太陽の紫外線によるものだが、これは日光の当たり具合によって電離圏の状態、つまり電離圏の電子とイオンの数が影響を受けるということである。この当たり具合は、地球上の緯度と太陽の高度(仰角)に関係している。そのため、季節や時刻によって電離圏のGPSへの影響の度合いは変化してゆく。

太陽の明るさは、目で見ていてもそれほど変化があるようには見えないが、紫外線の強さは太

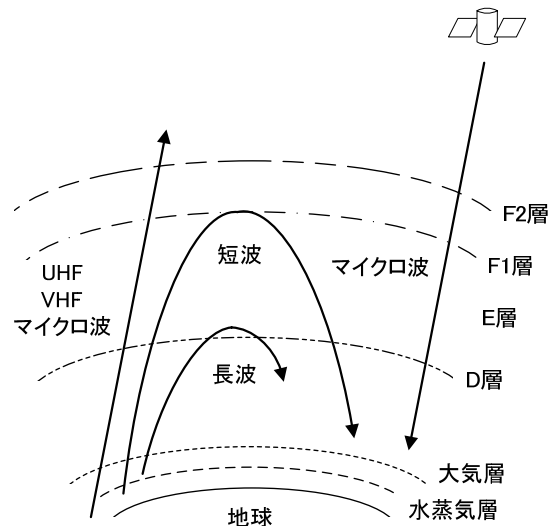


図 2-6 電離圏概要図

陽活動によって変化する。この紫外線は太陽全面から輻射されるのではなく、黒点の周辺から強く発生する。この紫外線は太陽の表面にしみのように現れるが、極めて激しい太陽ガスの攪乱場所となっている。ここでは、太陽面爆発(Flare：フレア)などの異常現象が発生する。

このようなことから、太陽活動の変化による黒点の増減に関連して電離圏の変化を考えることができる。図2-7に太陽黒点数の変動を示す。太陽ウォルフ黒点数(太陽黒点を統一的に表す指標となる)の変化から、太陽活動が約11年の周期を持っていることを見て取れる。2000年は太陽活動の極大期であると言われていたが、実際は2002年も非常に活発で、電頭の影響が例年よりも大きかったと言われている。

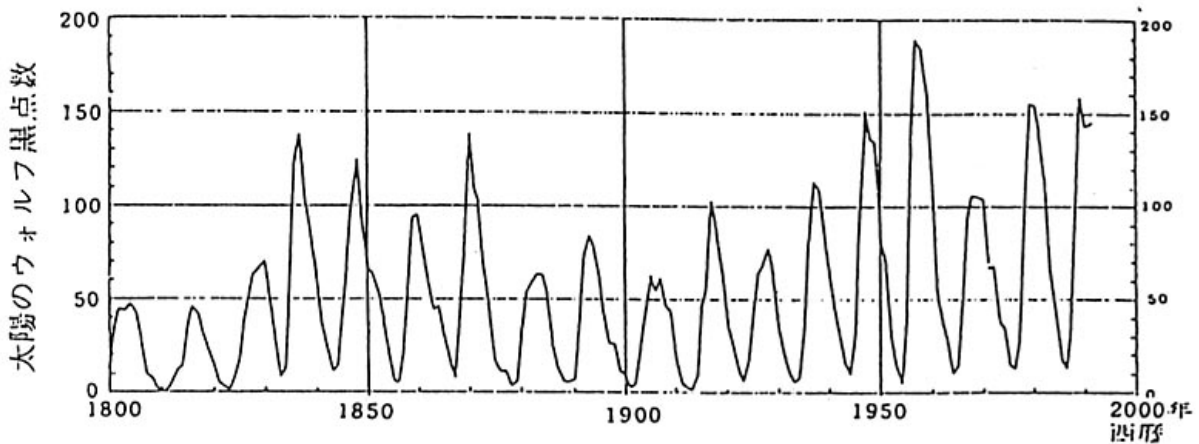


図 2-7 太陽黒点数の変動

電離圏遅延

GPSで使用されているのはマイクロ波(Micro wave)である。波長を表す式は以下のようになる。

$$\lambda = v / f \quad (2.16)$$

ただし、 λ は波長、 v は波の伝わる速さ、 f は周波数とする。光や電波の場合には、 v は約 $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ であるので、GPS衛星のL1帯の周波数 $f = \text{約} 1.6 \text{ GHz}$ を代入すると、 λ は19cmとなる。

電離媒質中に電磁波が入射すると、その電界により電子が動かされ、見かけの屈折率は

$$n = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega^2}} \quad (2.17)$$

となる。ただし、 N は電子密度、 e は電子の電荷、 m は電子の質量、 ϵ_0 は真空中の誘電率、 ω は電磁波の各周波数とする。

電磁波の電離媒質中の群速度は、

$$V_g = nc = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega^2}} \times c \quad (2.18)$$

となる。平方根内の第2項は1以下の正の数なので、電離体質中においては速度が遅くなる。GPS衛星から受信点までの伝搬経路はほとんどの部分で電離圏を通過し、電離圏内での群速度減少は経路全体で積算され、伝搬遅延となる。電離圏では屈折率が周波数によって異なるため、GPSの2周波数(L1、L2)の電波が受ける遅延は互いに異なる。

電離圏遅延量推定方法

GPSによって測定される擬似距離には、電離圏遅延量が含まれている。この遅延量を推定する方法には様々なものがあり、中でも広く用いられる推定方法としては、

- ・ 電離圏遅延モデルを利用して推定する方法
- ・ 2周波の観測データを利用して推定する方法

の2つが挙げられる。まず前者について簡単に紹介する。

代表的なモデルとして、Broadcast Modelが挙げられる。その名の通り、GPS衛星から送信される航法メッセージの中にある8つの電離圏パラメータを利用して、電離圏遅延量を推定するモデルである。また、このモデルはクロブッチャー(Klobuchar)モデルとも呼ばれている。電離圏の日変化は複雑な形をしているが、これを5nsの一定値と地方時(14時)にピークをもつ余弦関数の正の部分との組み合わせた曲線で単純化する(図2-8)。5nsの遅延は地球上どこでも等しいとして余弦関数の振幅Aと周期Tを与えることにより、電離圏の日変化を近似するモデルである。AとTは観測地で異なる値をとるが、これはマイクロ波が通過する地磁気緯度 Φ_m だけの関数で表現でき、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} A &= \alpha_0 + \alpha_1\Phi_m + \alpha_2\Phi_m^2 + \alpha_3\Phi_m^3 \\ T &= \beta_0 + \beta_1\Phi_m + \beta_2\Phi_m^2 + \beta_3\Phi_m^3 \end{aligned} \quad (2.19)$$

ここで、 α_n, β_n (n=0,1,2,3)は電離圏パラメータである。

次に具体的な流れを示す。まず地磁気緯度を求める。利用者のおおよその位置(緯度 Φ_u 、経度 λ_u)と衛星仰角Eと方位角Aと観測時刻(GPSTIME)が与えられているとする。このときの時間の単位は秒、角度の単位は度とする。

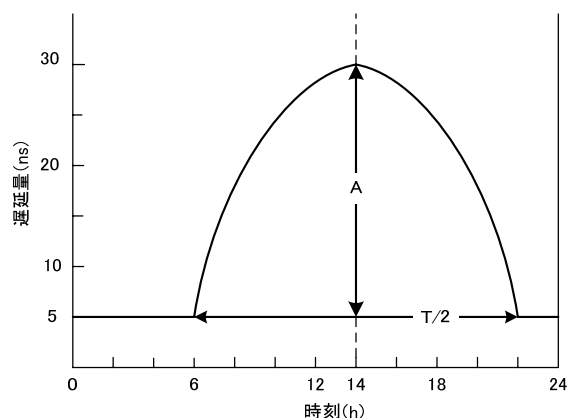


図 2-8 電離圏遅延モデル

- ① 利用者位置と電波が電離圏と交わる位置の地球中心を原点とする角度を求める。

$$\psi = \frac{443.88}{E + 19.8} - 3.96 \quad (2.20)$$

② ψ から電波と電離圏の交わる点の緯度 Φ_I を求める。

$$\Phi_I = \Phi_U + \psi \cos A \quad (2.21)$$

ただし、 $\Phi_I > +75$ なら、 $\Phi_I = +75$ 。 $\Phi_I < -75$ なら、 $\Phi_I = -75$ とする。

③ ψ と Φ_I から電波と電離圏が交わる点の経度 λ_I を求める。

$$\lambda_I = \lambda_U + \frac{\psi \sin A}{\cos \Phi_I} \quad (2.22)$$

④ Φ_I 、 λ_I から地磁気経度 Φ_m を計算する。

$$\Phi_m = \Phi_I + 11.7 \cos(\lambda_I - 291) \quad (2.23)$$

これで、 A と T を求めることが出来る。次に、観測時刻(GPSIME)から、現地時刻 t を算出する。

$$t = 4.32 \times 10^4 \frac{\lambda_I}{180} + GPSTIME \quad (2.24)$$

ただし、 $t > 86400$ なら $t = t - 86400$ 、 $t < 0$ なら $t = t + 86400$ とする

振幅と周期と現地時間から電離圏遅延量を推定することができるが、この推定された値はピアースポイント(電波が電離圏に入射する位置)に垂直に入射したときの値であり、実際には斜め方向より入射してくるため、推定値をそのまま遅延量とはできない。そこで、遅延増加率(傾斜角係数)を利用し、衛星仰角に依存した値に変更し、遅延量を求める。図 2-9 に遅延量増加率概念図を示す。

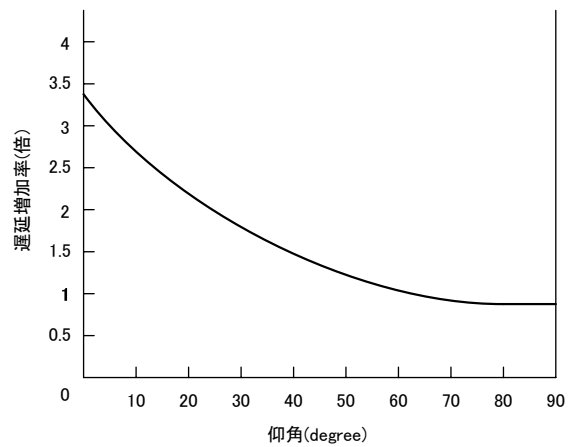


図 2-9 遅延増加率概念図

遅延増加率 F は、

$$F = 1.0 + 16.0 \times \left(0.53 - \frac{E}{180} \right)^3 \quad (2.24)$$

で、与えられる。振幅 A 、周期 T 、現在時間 t 、遅延増加量 F を用いて、電離層遅延 T_{iono} は、

$$T_{iono} = \begin{cases} F \left[5 \times 10^{-9} + A \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) \right], & |x| < 1.57 \\ 5 \times 10^{-9} F, & |x| \geq 1.57 \end{cases} \quad (2.25)$$

で与えられる。ここで、

$$x = \frac{2\pi(t - 14 \times 3600)}{T} \quad (2.26)$$

である。 T_{iono} は遅延時間(秒)として推定されるので、光速を乗じて電離層遅延量(m)を求める。

次に、2周波の観測データを利用して推定する方法について簡単に説明する。

電波が電離層を通過するときの屈折率は周波数に依存する。GPS信号は、L1、L2と、2種類の異なる周波数の電波を送信している。2つの電波は基本的に同じ伝搬経路を通過してくるはずなので、電子密度は同じであり、受信機時刻の差から電子密度を求めることができる。

実際には、電子密度を求めず、L1、L2の測定値(擬似距離(Code)、搬送波(Carrier))と、各周波数から求める。まず、L1の擬似距離の電離層遅延量 $I_{L1,\rho}$ は、

$$I_{L1,\rho} = \frac{f_{L2}^2}{(f_{L1}^2 - f_{L2}^2)} (\rho_{L2} - \rho_{L1}) \quad (2.27)$$

で与えられる。ここで、 f_{L1} 、 f_{L2} はL1、L2の周波数(L1: 1575.42MHz、L2: 1227.6MHz)、 ρ_{L1} 、 ρ_{L2} は、L1、L2の擬似距離を示している。では次に、搬送波測定値を用いて電離層遅延量を推定する。L1の搬送波の電離層遅延量(m)は、 $I_{L1,\phi}$

$$I_{L1,\phi} = \frac{f_{L2}^2}{(f_{L1}^2 - f_{L2}^2)} (\lambda_{L2}\phi_{L2} - \lambda_{L1}\phi_{L1}) \quad (2.28)$$

で与えられる。ここで、 λ_{L1} 、 λ_{L2} はL1、L2の波長(m)、 ϕ_{L1} 、 ϕ_{L2} はL1、L2の搬送波測定値(サイクル)である。搬送波測定値は、1波長を1サイクルとした単位で出力されるため、各波長を乗じて単位をmに変換し、計算を行う。

以上の方法から電離圏遅延量を求めることができるが、式(2.27)で求めた電離圏遅延量はノイズが大きく、式(2.28)で求めた電離圏遅延量は傾向が正確であるが、バイアスがある。そこで、両者の測定値を用いて、絶対値が正しく、ノイズの小さな遅延量を求める。その決定方法を以下に示す。

- ① 測定値がサイクルスリップ(衛星から電波が障害物で遮蔽される等の理由で位相測定が中断する現象)や、衛星が見えなくなり電波が受信されなくなるまでのインターバルを求める。
- ② 連続観測のできているインターバルの間との $I_{L1,\rho}$ と $I_{L1,\phi}$ の差をとり、平均値 \bar{I}_{L1} を求め、求めた平均値を、 $I_{L1,\phi}$ のバイアスとする。
- ③ $I_{L1,\phi}$ の値から求めたバイアスを取り除き、求めた値を電離圏遅延量とする。

このように求めた電離圏遅延量 I_{L1} は、

$$I_{L1} = I_{L1,\phi} + \bar{I}_{L1} \quad (2.29)$$

と表すことができる。

2周波で求められる電離圏遅延量はBroadcast Modelで推定した値より正確であるため、2周波受信機が利用できる場合こちらの方法を用いるのが一般的である。

対流圏遅延

中性気体は無線周波数に対して分散性を持たないので、L1、L2いずれも搬送波の位相速度と、群速度の変化量は一緒である。電離層のように周波数依存の変化量差がないため、対流圏遅延は直接測定することができない。そこでモデル化を行う必要がある。次に2つのモデルを紹介する。

• Saastamoinen Model

このモデルは1973年に提案されたモデルで、対流圏における遅延を地上の気温、気圧、相対湿度を用いて推定を行う。仰角20度以上の衛星に対しての大気による伝搬遅延 ΔL_s (m)は、

$$\Delta L_s = \frac{0.002277}{\cos(90-E)} \left[P + \left(\frac{1255}{T_0} + 0.05 \right) \cdot e - B \cdot \tan^2(90-E) \right] + \delta_R \quad (2.30)$$

で与えられる。ここで E は対象としている衛星の仰角(度)、 P は地表での気圧、 T_0 は地表での気温(K)、 e は地表での水蒸気圧、 B は観測点の海拔高度に関する補正係数で、表に示す値、 δ_R (m)は天頂角(90-E)と海拔高度に関する補正項で表に示す値である。

高度 (km)	B(hPa)
0.0	1.156
0.5	1.079
1.0	1.006
1.5	0.938
2.0	0.874
2.5	0.813
3.0	0.757
4.0	0.654
5.0	0.563

表 2-1 モデル高度に対する補正值

天頂角 (°)	受信機の海面上の高さ (km)							
	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0
60	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001
66	0.006	0.006	0.005	0.005	0.004	0.003	0.003	0.003
70	0.012	0.011	0.01	0.009	0.008	0.006	0.005	0.004
73	0.02	0.018	0.017	0.015	0.013	0.011	0.009	0.007
75	0.031	0.028	0.025	0.023	0.021	0.017	0.014	0.011
76	0.039	0.035	0.032	0.029	0.026	0.021	0.017	0.014
77	0.05	0.045	0.041	0.037	0.033	0.027	0.022	0.018
78	0.065	0.059	0.054	0.049	0.044	0.036	0.03	0.024
79	0.087	0.079	0.072	0.065	0.059	0.049	0.04	0.033
79.5	0.102	0.093	0.085	0.077	0.07	0.058	0.047	0.039
80	0.121	0.11	0.1	0.091	0.083	0.068	0.056	0.047

表 2-1 モデル受信機高と天頂角に対する補正值(m)

- **Hopfield Model**

大気による伝搬遅延を表すモデルであり、天頂方向の遅延量 ΔL_n を次式のように定義する。

$$\Delta L_n = H \frac{n_0 - 1}{5} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^5 \quad (2.31)$$

ここで n_0 は地上における大気の屈折率、 h は測定点の高度 (m)、 H はモデルで考慮する大気の厚さであり、43km程度とされている。この式から高度が上がると対流圏遅延が小さくなることにな

るが、これは上空に上がると測定信号が通過する大気の長さが減少するためである。大気の屈折率はおおよそ1.0003程度になる。

普通のGPS受信機では気圧、気温を知ることができない。そこで一般的な気象条件を仮定するだけで十分といわれている。たとえば、式(2.31)をもとに次式を仮定する。

$$\Delta L_s = 2.47(1 - 2.3 \times 10^{-5} \cdot h)^5 \quad (2.32)$$

この推定値は、天頂方向からの遅延量であるので、式(2.31)を衛星仰角 $E(^{\circ})$ 依存にすると、

$$\Delta L_h = \frac{2.47(1 - 2.3 \times 10^{-5} \cdot h)^5}{\sin E + 0.0121} \quad (2.33)$$

で表される。

2-2-4 マルチパス

マルチパスの誤差は直接波と周囲の構造物や海面や地形の起伏などからの反射波がアンテナから入射し、信号を擾乱することによって発生し、真の相関のピーク検出を妨害する。これは大きな反射物が近くにある場合の固定局で顕著に現れ、時として15mもの誤差を生じることがある。送信波は右旋波であるが、必ずしも理想的反射しないため、右旋波用のアンテナにも混入すると考えられる。

DGPS等基準局を必要とする測位では、特にマルチパスによる誤差がないようにアンテナの設置決める必要がある。またアンテナをチョークリング上に載せることで地面からの反射波の影響を削減できる。最近マルチパス軽減のために「narrow-correlator」受信機が存在する。

2-2-5 受信機雑音

受信機内部の様々な要因によって測定誤差が生じる。こうした影響は温度による影響を受けやすいことから、受信機の熱雑音(thermal noise)と呼ばれることがある。また、受信アンテナと受信機本体を接続する高周波ケーブルについては、品質の良いものを使用して最小限の長さにしたほうが良い。受信機内部の測定誤差は、高度な処理回路を採用している受信機でも0.5m程度生じるといわれている。

第3章 逐次的最小2乗法によるGPS単独測位

3-1 はじめに

第2章で述べたように、通常の単独測位では、観測値が得られるごとに測位計算が行われている。単独測位では、新しい観測値が次々に加わることがほとんどであるが、新たに観測値が得られた場合の測位計算には、前の時刻の測位結果は生かされていない。そこで、最小2乗法を用いて補正量の推定値を求め、推定誤差の共分散を新たな観測値が得られることによって逐次的に更新していく。これにより補正量の更新を可能とし、前時刻の測位結果から得られた更新分推定位置を移動させるといった測位方法を適用することにより、通常の単独測位に比べ、逐次的最小2乗法により測位結果がどのように変化し、どの程度の精度が得られるかを調査した。

3-2 測位計算

逐次的最小2乗法の方法として、まず、単独測位では、新しい観測値が次々に加わることがほとんどであるが、その度に既存の観測値と統合して再度統一的に最小2乗法を行うのでは、観測値が多いと非能率的である。そこで、本研究では、すでに計算された結果は時間に沿って有効に利用しようとするものであるとする。

はじめに、観測値 Z から重み付け最小2乗法を用いて得られた補正量 δx の推定値 \hat{x}_m は、デザイン行列 A 、重み W を用いて、

$$\hat{x}_m = (A^T W A)^{-1} A^T W Z \quad (3.1)$$

と表すことができる。補正量 δx の推定値 \hat{x}_m と真値 x との推定誤差 ε は、計測値と推定値の差 v を用いて、

$$\begin{aligned} \varepsilon &\equiv x - \hat{x}_m \\ &= x - (A^T W A)^{-1} A^T W Z \\ &= x - (A^T W A)^{-1} A^T W (Hx + v) \\ &= -(A^T W A)^{-1} A^T W v \end{aligned} \quad (3.2)$$

で表される。補正量 δx の推定値 \hat{x}_m と真値 x との推定誤差 ε の共分散 P_m は、

$$\begin{aligned}
P_m &\equiv E(\varepsilon\varepsilon^T) \\
&= E\left[\left((A^TWA)^{-1}A^TWv\right)\left((A^TWA)^{-1}A^TWv\right)^T\right] \\
&= E\left[\left((A^TWA)^{-1}A^TWv\right)\left(v^TWA(A^TWA)^{-1}\right)\right] \\
&= (A^TWA)^{-1}A^TWW^{-1}WA(A^TWA)^{-1} \\
&= (A^TWA)^{-1}(A^TWA)(A^TWA)^{-1} \\
&= (A^TWA)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

と表すことができる。 P_m を用いると \hat{x}_m は、

$$\hat{x}_m = P_m A^T W Z \tag{3.4}$$

と書ける。ここで、新たに観測値 Z_{m+1} がえられたとする。新しい観測値が得られたことによって、推定値 \hat{x}_{m+1} は、観測値が得られる前の推定値 \hat{x}_m に対して、

$$\hat{x}_{m+1} = \hat{x}_m + \Delta x \tag{3.5}$$

で求められれば、再帰的に次々新たな観測値が得られることによって推定値を更新していくことが可能となる。

新たに得られた観測値推定値 Z_{m+1} と Z を統一的に重み付け最小2乗法を適用すると、補正量の推定値 \hat{x}_{m+1} は、新たなデザイン行列 A' と重み w を用いて、

$$\hat{x}_{m+1} = (A^TWA + A'wA'^T)^{-1}(A^TWZ + A'wZ_{m+1}) \tag{3.6}$$

で表すことができる。式(3.3)にならえば、推定誤差の共分散 P_{m+1} は次のようになる。

$$\begin{aligned}
P_{m+1} &\equiv \left(\begin{pmatrix} A \\ A^T \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ A^T \end{pmatrix} \right)^{-1} \\
&= (A^TWA + A'wA'^T)^{-1} \\
&= (P_m^{-1} + A'wA'^T)^{-1} \\
&= P_m - P_m A' (A^TWA + w)^{-1} A'^T P_m
\end{aligned} \tag{3.7}$$

ここで、

$$k_m = P_m A' (A'^T P_m A' + w^{-1})^{-1} \quad (3.8)$$

なる k_m を用いれば

$$P_{m+1} = (E - k_m A'^T) P_m \quad (3.9)$$

が得られ、この P_{m+1} から \hat{x}_{m+1} を求めると、

$$\begin{aligned} \hat{x}_{m+1} &= P_{m+1} (A'^T WZ + A' w Z_{m+1}) \\ &= (E - k_m A'^T) P_m (A' WZ + A' w Z_{m+1}) \\ &= (E - k_m A'^T) \hat{x}_m + (E - k_m A'^T) P_m A' w Z_{m+1} \\ &= (E - k_m A'^T) \hat{x}_m + \left(E - P_m A' (A'^T P_m A' + w^{-1})^{-1} A'^T \right) k_m (A'^T P_m A' + w^{-1}) w Z_{m+1} \\ &= (E - k_m A'^T) \hat{x}_m + \frac{(A'^T P_m A' + w^{-1}) E - P_m A' A'^T}{A'^T P_m A' + w^{-1}} k_m (A'^T P_m A' + w^{-1}) w Z_{m+1} \\ &= (E - k_m A'^T) \hat{x}_m + w^{-1} k_m w Z_{m+1} \\ &= (E - k_m A'^T) \hat{x}_m + k_m Z_{m+1} \\ &= \hat{x}_m + k_m (Z_{m+1} - A' \hat{x}_m) \end{aligned} \quad (3.10)$$

と表すことができる。これは、式(3.5)の形をしているので、再帰的に次々新たな観測値が得られることによって推定値を更新していくことが可能であるといえる。以上の手順を繰り返し、推定誤差の共分散を収束させていくことで、補正量の推定値を更新していく。

3-3 実験結果

今回使用したデータは、東京海洋大学第四実験棟屋上で取得し、単独測位を行った。このデータから、逐次的最小2乗法による単独測位を行い、通常の単独測位との誤差の結果比較を行った。表3-1と3-2にそれぞれ逐次的最小2乗法の適用前、適用後の誤差の標準偏差と平均値、図3-1と3-2にそれぞれ水平方向測位結果と、垂直方向測位結果を示す。

表3-1 各単独測位における水平方向誤差の標準偏差

	緯度方向[m]	経度方向[m]	垂直方向 [m]
逐次的最小2乗法	0.507	0.166	0.341
通常の単独測位	0.616	0.535	3.196

表3-1 各単独測位における水平方向誤差の標準偏差

	緯度方向[m]	経度方向[m]	垂直方向 [m]
逐次的最小2乗法	-0.511	0.579	-5.091
通常の単独測位	-0.403	0.934	0.306

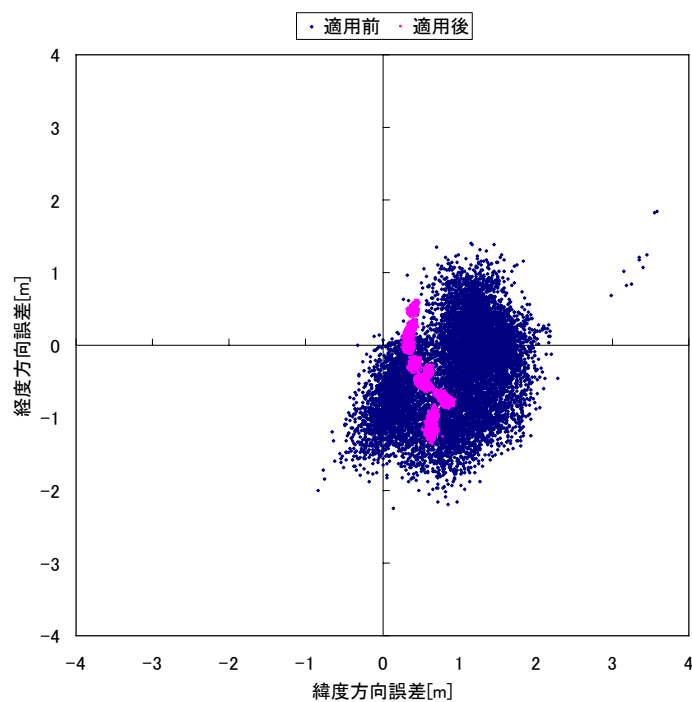


図 3-1 水平方向測位結果

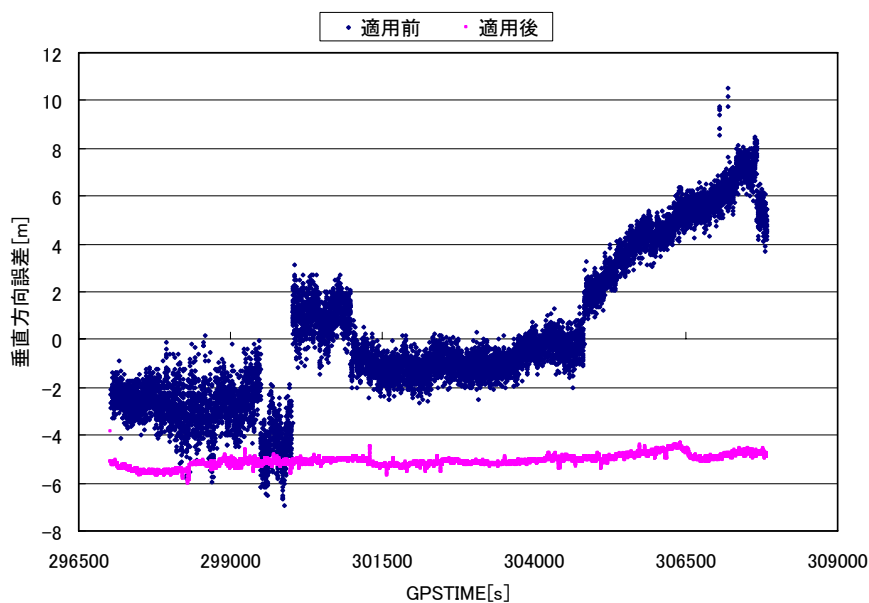


図 3-2 垂直方向測位結果

結果比較

従来の単独測位に逐次的最小2乗法を適用することによって、従来の単独測位よりも明らかに良い精度が得られた。表 3-1 の標準偏差からもわかるように、誤差を収束させ、ばらつきを取り除くことができた。

しかし、図 3-2 を見ると、この方法を適用してノイズは取り除くことができるが、バイアスは取り除くことはできなかった。また、現在のところ、静止体には有効であったが、移動体での利用は難しいと考えられる。

第4章 干渉測位

4-1 測位原理

GPS測位では測位を行うための2つのパラメータとして衛星位置と衛星-利用者間の距離を用いる。衛星-利用者間の距離として単独測位やDGPS測位は擬似距離を使用する。干渉測位は、衛星-利用者間の距離として擬似距離の代わりに搬送波位相(Carrier Phase)を利用する。擬似距離と比較すると搬送波位相の測距精度が高いため、干渉測位は数mmから数cmの測位が可能となる。干渉測位は、座標が既知である固定基準局に対する利用者の相対位置を求める方法が一般的である。原理は、座標が既知である固定基準局で搬送波位相を測定し、同時に利用者側でも搬送波位相を測定する。基準局と利用者側で同じ衛星から測定した搬送波位相の差(行路差)を求めることにより、基準局からの基線ベクトルを求める。基線ベクトルを求めることができれば、利用者の座標は基準局からの相対位置として求めることが可能である。図4-1に行路差と基線ベクトルの関係図を示す。基線ベクトルは3つの未知数で表され、解くためには3個の行路差が必要である。つまり3衛星の測定値が観測できれば良いことになるが、単独測位と同様に受信機の時計誤差を消去するためにもう1機の衛星が必要となる。

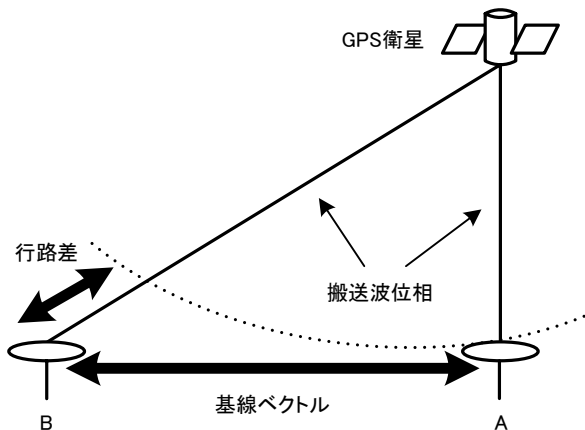


図 4-1 行路差と基線ベクトル

4-2 測位計算

4-2-1 搬送波位相と Ambiguity

搬送波位相は、衛星のC/Aコードや航法メッセージ等の情報をGPS衛星から地上に運ぶ媒体であり、電波である。搬送波自体はサイン波であり情報は無く、変調することによって情報を持たせることができる。GPSの搬送波にはL1帯とL2帯の2種類があり、L1帯は1,575.42MHz、L2帯は1,227.6MHzの周波数である。それぞれを1波長で表すとL1帯は約0.19m、L2帯は約0.24mである。搬送波位相は1波長を1サイクル(波数)として表される。搬送波の測距精度は1波長の100分の1であ

るため、搬送波位相はL1帯で約2mmの精度で測定できる。このように波数を少数点以下まで測定した値を搬送波位相と呼ぶ。GPS受信機から出力される搬送波位相は、波数を0.01サイクルの精度で測定し積算した値である。ここで*i*番衛星のL1帯の搬送波位相 $\phi_{L1}^{(i)}$ (cycle)を式で表現すると、

$$\phi_{L1}^{(i)} = \lambda_{L1}^{-1}(r^{(i)} - I_{L1}^{(i)} + T_{L1}^{(i)}) + f_{L1}(\delta t_u - \delta t^{(i)}) + N_{L1}^{(i)} + \varepsilon_{L1}^{(i)} \quad (4. 1)$$

となる。ここで λ_{L1} はL1帯の波長(m)、 r は衛星-利用者間の正確な距離(m)、 I_{L1} はL1帯の電離層遅延量(m)、 T_{L1} はL1帯の対流圏遅延量(m)、 f_{L1} はL1帯の周波数(MHz)、 δt_u は受信機の時計誤差(s)、 δt は衛星の時計誤差(s)、 N_{L1} はL1帯搬送波の整数値バイアス(cycle)、 ε_{L1} はマルチパス等の誤差(cycle)である。上付き文字*i*の括弧は、次数と衛星番号の区別するためのものである。擬似距離と異なる点は、まず搬送波が電離層を通過するとき、位相速度は見かけ上速くなるため電離層遅延量の符号は負となることである。次にマルチパスの影響が擬似距離のmレベルと比較して、搬送波はcmレベルと小さい。最後に整数値バイアス(Integer Ambiguity)と呼ばれる項の存在である。搬送波位相は整数部(1波長の数)と小数部とで構成されている。小数部は0.01サイクルの精度で正確に測定できることは先ほど述べたが、整数部の絶対値は整数値バイアスのために正確に測定できない。整数値バイアスはその名の通り整数値となるが、衛星ごと、受信機ごとに異なる値を示すため、電離層、対流圏遅延を相殺するように他の測定値を利用して相殺することができない。しかし搬送波を連続的に観測できている期間においては、整数値バイアスは変化しないため、一度決定(Integer Ambiguity Resolution)できると連続的に正確な搬送波位相を得ることができる。サイクルスリップ等の原因で連続観測が中断した場合整数値バイアスは変化するため、もう一度決定しなおす必要がある。干渉測位計算アルゴリズムはDGPS測位と同様で単純であるが、整数値バイアスの決定が容易でない。干渉測位にはいろいろな種類があるが、基準局からの基線ベクトルを求めることには相違なく、整数値バイアスの決定方法の違いによる分別である。

4-2-2 搬送波位相の誤差項と削除

式(4. 1)には整数値バイアス以外の誤差項(電離層、衛星時計等)がある。これらの誤差項はDGPS測位と同様に基準局の測定値等を利用して相殺できる。整数値バイアスの決定、測位精度の改善のために誤差項を相殺したほうがよい。ここでは搬送波位相の誤差項の削除法を記す。

4-2-2-1 一重位相差(Single Difference)

・受信機間一重位相差

図4-1のように、基準局と利用者側の受信機で同時に同じ衛星から測定した搬送波位相の差、つ

まり行路差を求める方法である。受信機間一重位相差 $\phi_{u-r}^{(i)}$ は、

$$\begin{aligned} \phi_{u-r}^{(i)} &= \phi_u^{(i)} - \phi_r^{(i)} \\ &= \lambda^{-1}[(r_u^{(i)} - r_r^{(i)}) - (I_u^{(i)} - I_r^{(i)}) + (T_u^{(i)} - T_r^{(i)})] \\ &\quad + f[(\delta t_u - \delta t_r) - (\delta t^{(i)} - \delta t^{(i)})] + (N_u^{(i)} - N_r^{(i)}) + (\varepsilon_u^{(i)} - \varepsilon_r^{(i)}) \\ &= \lambda^{-1}(r_{u-r}^{(i)} - I_{u-r}^{(i)} + T_{u-r}^{(i)}) + f \cdot \delta t_{u-r} + N_{u-r}^{(i)} + \varepsilon_{u-r}^{(i)} \end{aligned} \tag{4. 2}$$

で表される。ここで添え字の u は利用者側、 r は基準局を示し、 $u-r$ は利用者側の測定値から基準局の測定値を引いた値を示す。式(4. 2)では衛星時計誤差の項が相殺されていることがわかる。受信機間一重位相差では衛星時計誤差が消去できる。整数値バイアスは基準局と利用者側の差となるが整数の値となる。式(4. 2)は基線長が短距離である場合、電離層と対流圏の項は同じ衛星であるため相殺できる。式(4. 2)から短基線長の受信機間一重位相差は、

$$\phi_{u-r}^{(i)} = \lambda^{-1} \cdot r_{u-r}^{(i)} + f \cdot \delta t_{u-r} + N_{u-r}^{(i)} + \varepsilon_{u-r}^{(i)} \tag{4. 3}$$

となる。当然のことながら基線長が長距離の場合や電離層の活動が活発である場合は相殺されずに誤差項を消去することはできない。

・衛星間一重位相差

図5-2のように、1個の受信機で同時刻に測定したGPS衛星2機の搬送波位相差を取った値を衛星間一重位相差と言う。

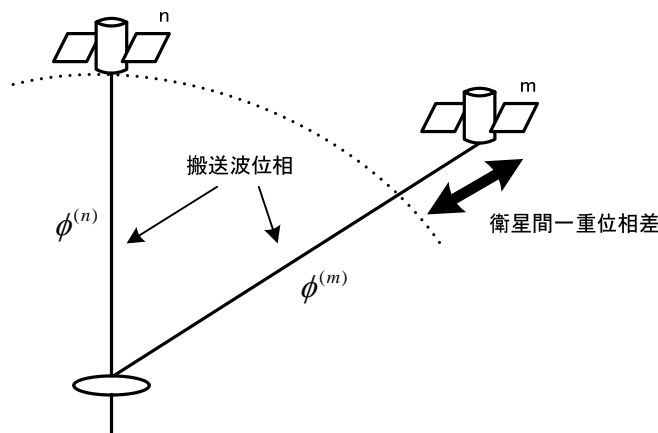


図 4-2 衛星間一重位相差

例えば利用者側の受信機で n 番衛星と m 番衛星の搬送波位相を測定したとすると、衛星間一重位

相差 $\phi_u^{(n-m)}$ は、

$$\begin{aligned}
 \phi_u^{(n-m)} &= \phi_u^{(n)} - \phi_u^{(m)} \\
 &= \lambda^{-1}[(r_u^{(n)} - r_u^{(m)}) - (I_u^{(n)} - I_u^{(m)}) + (T_u^{(n)} - T_u^{(m)})] \\
 &\quad + f[(\delta t_u - \delta t_u) - (\delta t^{(n)} - \delta t^{(m)})] + (N_u^{(n)} - N_u^{(m)}) + (\varepsilon_u^{(n)} - \varepsilon_u^{(m)}) \\
 &= \lambda^{-1}(r_u^{(n-m)} - I_u^{(n-m)} + T_u^{(n-m)}) + f \cdot \delta t^{(n-m)} + N_u^{(n-m)} + \varepsilon_u^{(n-m)}
 \end{aligned}
 \tag{4.4}$$

で表される。式(4.4)から衛星間一重位相差では受信機の時計誤差の項が相殺できる。

衛星間一重位相差は搬送波位相を測定した衛星が異なるため、電離層、対流圏の項を相殺することはできない。衛星間一重位相差も受信機間一重位相差と同様に整数値バイアスの項は整数である。

4-2-2-2 二重位相差(Double Difference)

どちらの一重位相差でも時計誤差を完全に消去することができない。二重位相差は衛星時計誤差と受信機時計誤差の両方を理論的に完全に消去できる。

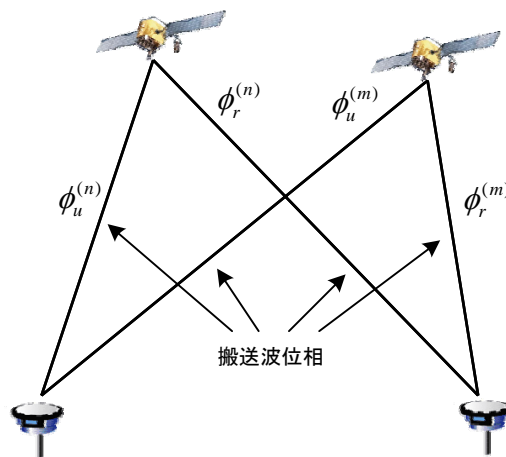


図 4-3 二重位相差

二重位相差は受信機間一重位相差からも衛星間一重位相差からも求めることができ、結果は同じである。図5-3が示すように2地点の観測場所と、それぞれの地点で2機のGPS衛星からの搬送波位相から二重位相差 $\phi_{u-r}^{(n-m)}$ は、

$$\begin{aligned}
\phi_{u-r}^{(n-m)} &= (\phi_u^{(n)} - \phi_r^{(u)}) - (\phi_u^{(m)} - \phi_r^{(m)}) \\
&= \lambda^{-1}(r_{u-r}^{(n-m)} - I_{u-r}^{(n-m)} + T_{u-r}^{(n-m)}) + N_{u-r}^{(n-m)} + \varepsilon_{u-r}^{(n-m)}
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

で表される。ここで式(4.5)はn番衛星とm番衛星の受信機間一重位相差を求め、それらの値を差し引いた値である。(4.5)式を並べ替えることにより、利用者側と基準点の衛星間一重位相差の引き算になることがわかる。(5.5)式からは衛星時計誤差と受信機時計誤差が完全に消去され、基線長が短距離であれば電離層、対流圏の項も相殺される。干渉測位は行路差から基線ベクトルを求めると説明したが、実際の干渉測位には、一重位相差では時計誤差が完全に消去されないために使用しない。二重位相差を行路差に相当する値として測位を行う。また、基線ベクトル、未知点の座標を求めるためには独立した二重位相差が3個必要であるため、コードを利用する測位と同様に、最低4衛星の測定値が必要である。測位計算では独立した二重位相差を算出するためにある衛星を基準にする。一般的には衛星仰角の最も高い衛星を基準衛星とする場合が多い。

4-2-2-3 線形結合

GPSにおける線形結合とは、L1帯とL2帯の搬送波位相の測定値を二乗や平方根等の項を含まない形で結合し、見かけ上測定された新しい搬送波位相を求めることをいう。線形結合で求められるi番衛星の新しい搬送波位相 $\phi^{(i)}$ は、

$$\phi^{(i)} = g_1 \cdot \phi_{L1}^{(i)} + g_2 \cdot \phi_{L2}^{(i)}
\tag{4.6}$$

で表される。ここで g_1 、 g_2 は任意の数を示している。 g_1 、 g_2 の与え方によって様々な搬送波を算出できる。 g_1 、 g_2 にはどのような値を代入してもよいが、大きすぎる値では線形結合で求めた搬送波位相の雑音が増加し、搬送波位相の持つ正確性を失われる。線形結合された搬送波位相の波長 λ 周波数 f は、

$$\begin{aligned}
f &= g_1 \cdot f_{L1} + g_2 \cdot f_{L2} \\
\lambda &= \frac{c}{f} = \frac{c}{g_1 \cdot f_{L1} + g_2 \cdot f_{L2}}
\end{aligned}
\tag{4.7}$$

で表される。次に代表的な線形結合である、ワイドレーン(Wide Lane)について説明する。

• ワイドレーン(wide Lane)

ワイドレーン $\phi_w^{(i)}$ は、式(4. 6)の $g_1 = 1$ 、 $g_2 = -1$ として、

$$\phi_w^{(i)} = \phi_{L1}^{(i)} - \phi_{L2}^{(i)} \quad (4. 8)$$

と線形結合された搬送波である。波長 λ_w と、周波数 f_w は式(4. 7)から、

$$\begin{aligned} f_w &= f_{L1} - f_{L2} = 1575.42\text{MHz} - 1227.6\text{MHz} = 347.82\text{MHz} \\ \lambda_w &= \frac{c}{f_w} = 86.3\text{cm} \end{aligned} \quad (4. 9)$$

となる。ワイドレーンは、式(4. 9)が示すように、L1 帯、L2 帯の搬送波と比較して1波長が長い。ワイドレーンの整数値バイアス N_w は、

$$N_w = N_{L1} - N_{L2} \quad (4. 10)$$

と表される。 g_1 、 g_2 ともに整数倍であるため、ワイドレーンの整数値バイアスは整数のままである。また、電離層の影響は、L1 帯搬送波と比較して、約0.28倍となる。

4-3 FLOAT 解アルゴリズム

干渉測位において一番の問題は整数値バイアスの存在である。FLOAT解アルゴリズムは、この整数値バイアスを未知数の1つと考えて逐次近似計算によって求める方法である。測位計算を繰り返し行い求められる整数値バイアスが実数であることから、求められた座標をフロート解と呼ぶ。ここで時刻 t における i 番、 j 番衛星の位置を $(x^{(i)}(t), y^{(i)}(t), z^{(i)}(t))$ 、 $(x^{(j)}(t), y^{(j)}(t), z^{(j)}(t))$ とし、基準衛星を $j=1$ とする。また基準局、未知点の座標を (x_r, y_r, z_r) 、 (x_u, y_u, z_u) とする。各衛星と各局における距離は、

$$R_m^{(k)}(t) = \sqrt{(x^{(k)}(t) - x_m)^2 + (y^{(k)}(t) - y_m)^2 + (z^{(k)}(t) - z_m)^2} \quad (4. 11)$$

と表される。ここで k は、 i 、1番衛星を示し、 m は r (基準局)、 u (未知点)を示している。 R は衛星とアンテナ間の正確な距離である。式(5. 11)から二重位相差 $\varphi(i-1)u-r$ は以下のように表すことができる。

$$\lambda \cdot \phi_{u-r}^{(i-1)} = \left\{ R_u^{(i-1)}(t) - R_r^{(i-1)}(t) \right\} + \lambda \cdot N_{u-r}^{(i-1)}$$

$$R_u^{i-1}(t) = R_u^{(i)}(t) - R_u^{(1)}(t) \quad (4. 1 2)$$

$$R_u^{i-1}(t) = R_u^{(i)}(t) - R_u^{(1)}(t)$$

ここで λ はここで λ は用いている搬送波の波長(m)を示す。式(5. 1 2)は観測可能な衛星数を svn とすると $[svn-1]$ 個作成できる。衛星の位置は衛星軌道情報から計算でき、基準局の座標は既知であるため、未知数は $[svn-1]$ 個の整数値バイアスと未知点の位置 (x_u, y_u, z_u) の3個で計 $[svn+2]$ となる。作成できる式より未知数の数が多いため、このままでは解くことができない。この問題は連続的に搬送波位相を測定できている間であれば整数値バイアスは変化しない特性を利用することで解決できる。2つの観測時刻から $2 \times [svn-1]$ 個の式を作成することができる。2つの観測時刻中にサイクルスリップ等による連続測定中断が無ければ、未知数の数は変化しないため、解くことができる。式(5. 1 2)の既知の値は左辺、未知数を右辺へ移項すると、

$$\lambda \cdot \phi_{u-r}^{(i-1)} + R_r^{(i-1)}(t) = R_u^{(i-1)}(t) + \lambda \cdot N_{u-r}^{(i-1)} \quad (4. 1 3)$$

と書き換えることができる。つまり(左辺-右辺)が0になるときの各未知数が求めたい解となる。式(4. 1 3)の左辺は既知の値であるので $Y^{(i-1)}(t)$ としてまとめると、

$$Y^{(i-1)}(t) = R_u^{(i-1)}(t) + \lambda \cdot N_{u-r}^{(i-1)} \quad (4. 1 4)$$

と書き換えることができる。式(4. 1 4)は二乗や平方根があり、このままでは容易に解くことができない。そこで第2章で述べた単独測位計算方法を使用する。未知数を近似値と補正量の和であらわし、式を補正量についての連立1次方程式に展開することで容易に未知数を解く方法である。ここで、未知数(未知点の位置座標、整数値バイアス)と補正量の関係は、

$$\begin{aligned} x_{u,n+1} &= x_{u,n} + \Delta x \\ y_{u,n+1} &= y_{u,n} + \Delta y \\ z_{u,n+1} &= z_{u,n} + \Delta z \\ N_{u-r,n+1}^{(i-1)} &= N_{u-r,n}^{(i-1)} + \Delta N \end{aligned} \quad (4. 1 5)$$

と表される。ここで添え字 n は逐次計算回数を示し、 $n=0$ の未知数は初期値を示す。 n 回目の計算で求められる式(5. 1 4)の $Y^{(i-1)}(t)$ の近似距離に相当する右辺 $Y_n^{(i-1)}(t)$ は、

$$\begin{aligned}
Y_n^{(i-1)}(t) &= R_{n,u}^{(i-1)}(t) + \lambda \cdot N_{n,u-r}^{(i-1)} \\
&= \left\{ \sqrt{(x^{(i)}(t) - x_{n,u})^2 + (y^{(i)}(t) - y_{n,u})^2 + (z^{(i)}(t) - z_{n,u})^2} \right\} \\
&\quad - \left\{ \sqrt{(x^{(1)}(t) - x_{n,u})^2 + (y^{(1)}(t) - y_{n,u})^2 + (z^{(1)}(t) - z_{n,u})^2} \right\} \\
&\quad + \lambda \cdot N_{n,u-r}^{(i-1)}
\end{aligned} \tag{4. 16}$$

と表せる。近似距離 $Y_n^{(i-1)}(t)$ と、既知の $Y_n^{(i-1)}(t)$ との残差 $\Delta Y_n^{(i-1)}(t)$ は、

$$\Delta Y_n^{(i-1)}(t) = Y_n^{(i-1)}(t) - Y_n^{(i-1)}(t) \tag{4. 17}$$

として求められる。 $(x_{n,u}, y_{n,u}, z_{n,u})$ と $N_{u-r}^{(i-1)}$ を残差 $\Delta Y_n^{(i-1)}(t)$ 分に相当する分だけ修正すれば、正し

い解に近づくことができる。このためには、近似距離 $Y_n^{(i-1)}(t)$ の $(x_{n,u}, y_{n,u}, z_{n,u})$ と $N_{u-r}^{(i-1)}$ に

よる偏微分、

$$\begin{aligned}
\alpha_n^{(i-1)}(t) &= \frac{\partial Y_n^{(i-1)}(t)}{\partial x} = - \left(\frac{x^{(i)}(t) - x_{n,u}}{R_{n,u-r}^{(i)}(t)} - \frac{x^{(1)}(t) - x_{n,u}}{R_{n,u-r}^{(1)}(t)} \right) \\
\beta_n^{(i-1)}(t) &= \frac{\partial Y_n^{(i-1)}(t)}{\partial y} = - \left(\frac{y^{(i)}(t) - y_{n,u}}{R_{n,u-r}^{(i)}(t)} - \frac{y^{(1)}(t) - y_{n,u}}{R_{n,u-r}^{(1)}(t)} \right) \\
\gamma_n^{(i-1)}(t) &= \frac{\partial Y_n^{(i-1)}(t)}{\partial z} = - \left(\frac{z^{(i)}(t) - z_{n,u}}{R_{n,u-r}^{(i)}(t)} - \frac{z^{(1)}(t) - z_{n,u}}{R_{n,u-r}^{(1)}(t)} \right) \\
1 &= \frac{\partial Y_n^{(i-1)}(t)}{\partial N_{u-r}^{(i-1)}}
\end{aligned} \tag{4. 18}$$

を用いる。 $(x_{n,u}, y_{n,u}, z_{n,u})$ の各補正量に置き換えると、

$$\Delta Y_n^{(i-1)}(t) = \alpha_n^{(i-1)}(t) \cdot \Delta x + \beta_n^{(i-1)}(t) \cdot \Delta y + \gamma_n^{(i-1)}(t) \cdot \Delta z + \lambda \cdot \Delta N_{u-r}^{(i-1)} \tag{4. 19}$$

となり、一次方程式の表現に書き換えることができたので、後は単独測位計算と同様に補正量が収束するまで計算を行う。FLOAT 解測位計算では、基準時刻($t=0$)と観測時刻($t \geq 1$)の2つの時刻で、最低4機以上の同じ衛星の組み合わせから算出した測定値を用いるため、可視衛星数を($s+1$)

とすると $2s$ 個の(5-18)式を立てることができる。扱いを容易にするため次のような行列を用いる。

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_n^{(2-1)}(0) & \beta_n^{(2-1)}(0) & \gamma_n^{(2-1)}(0) & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_n^{(3-1)}(0) & \beta_n^{(3-1)}(0) & \gamma_n^{(2-1)}(0) & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ \alpha_n^{(S-1)}(0) & \beta_n^{(S-1)}(0) & \gamma_n^{(S-1)}(0) & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \\ \alpha_n^{(2-1)}(t) & \beta_n^{(2-1)}(t) & \gamma_n^{(2-1)}(t) & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_n^{(3-1)}(t) & \beta_n^{(3-1)}(t) & \gamma_n^{(3-1)}(t) & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ \alpha_n^{(S-1)}(t) & \beta_n^{(S-1)}(t) & \gamma_n^{(S-1)}(t) & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\delta Y = \begin{pmatrix} \Delta Y_n^{(2-1)}(0) \\ \Delta Y_n^{(3-1)}(0) \\ \vdots \\ \Delta Y_n^{(S-1)}(0) \\ \Delta Y_n^{(2-1)}(t) \\ \Delta Y_n^{(3-1)}(t) \\ \vdots \\ \Delta Y_n^{(S-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \delta X = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta N_{u-r}^{(2-1)} \\ \Delta N_{u-r}^{(3-1)} \\ \vdots \\ \Delta N_{u-r}^{(S-1)} \end{pmatrix}$$

したがって、 $2s$ 個の式(4. 19)の連立方程式は、

$$\delta Y = G \cdot \delta X \quad (4. 20)$$

で表すことができ、

$$\delta X = (G^T \cdot G)^{-1} \cdot G^T \cdot \delta Y \quad (4. 21)$$

と式(4. 20)を変形させ各未知数の補正量を算出し、補正量が収束するまで式(4. 20)の計算を繰り返し行う。補正量が収束したときの推定値が未知数の座標である、整数値バイアス(実数)となる。

図4-4に上記のfloat解アルゴリズムを用いたfloat解アンビギュイティ、図4-5にfloat解アルゴリズムを用いた測位結果を示す。

図4-4、4-5はそれぞれ基線長約10kmの場合のfloat解アンビギュイティ、float解アルゴリズムを用いた測位結果(垂直方向)である。float解アンビギュイティ、float解アルゴリズムを用いた測位結果ともに測位時間の経過とともに精度が改善され、収束していく様子が見られる。

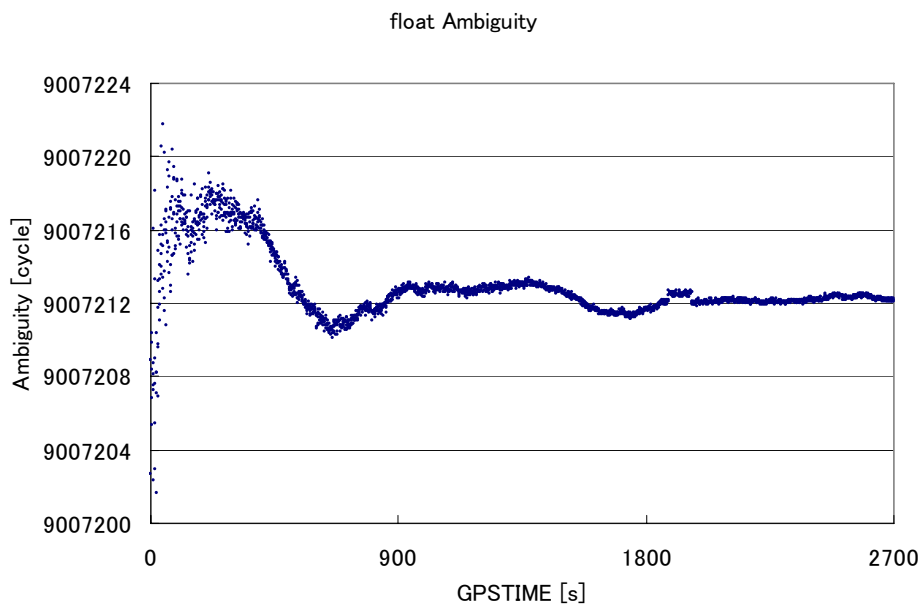


図 4-4 float 解アンビギュイティ

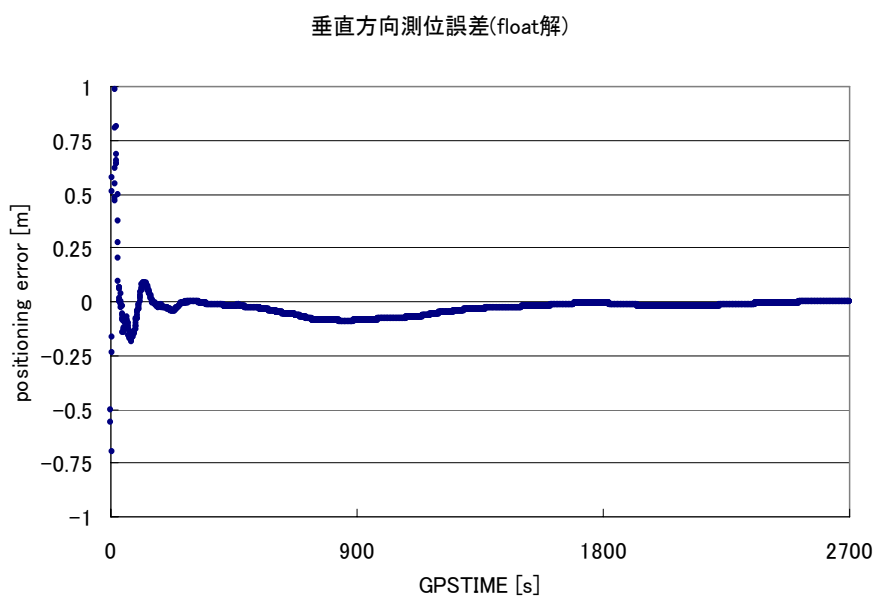


図 4-5 float 解アルゴリズム測位誤差(垂直方向)

4-4 FIX 解アルゴリズム

FLOAT解は、整数値バイアスを実数として求めた。FIX解とは、整数値バイアスの正しい値を実数でなく整数(波数)にして求めた測位解のことである。正しい整数値バイアスを求める方法としては、FLOAT解が収束した時の整数値バイアス(実数)を四捨五入して整数値とする方法がある。またDGPS測位結果との比較や衛星の組み合わせの変化等による求め方もある。実際に整数値バ

イアスを決定することができたならば、観測時刻 t における測定値(最低4 衛星)のみで、測位結果を高精度に求めることができる。式(4. 1 3)において整数値バイアス N の項が既知の値となり左辺に移項できる。よって式(4. 1 3)式は、

$$Y^{(i-1)}(t) = R_u^{(i-1)}(t) \tag{4. 2 2}$$

と書き直すことができる。式(4. 2 2)の線形化を行うと、

$$\Delta Y^{(i-1)}(t) = \alpha_u^{(i-1)}(t) \cdot \Delta x + \beta_u^{(i-1)}(t) \cdot \Delta y + \gamma_u^{(i-1)}(t) \cdot \Delta z \tag{4. 2 3}$$

で表すことができる。したがって **FIX** 解では時刻 t の測定値のみで測位できるため、可視衛星数を $(s+1)$ 個とすると、式(4. 2 3)は s 個できる。行列を用いると、各行列は、

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_n^{(2-1)}(t) & \beta_n^{(2-1)}(t) & \gamma_n^{(2-1)}(t) \\ \alpha_n^{(3-1)}(t) & \beta_n^{(3-1)}(t) & \gamma_n^{(3-1)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n^{(s-1)}(t) & \beta_n^{(s-1)}(t) & \gamma_n^{(s-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \delta Y = \begin{pmatrix} \Delta Y_n^{(2-1)}(t) \\ \Delta Y_n^{(3-1)}(t) \\ \vdots \\ \Delta Y_n^{(s-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \delta X = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

で表すことができる。したがって、**FIX** 解は上記の行列を式(5. 2 1)に代入して、繰り返し計算を行うことにより求めることができる。図 4-6 に基線長約 10km での **FIX** 解アルゴリズム測位結果を示す。float 解と比較して測位開始から測位精度の高い結果が得られている。

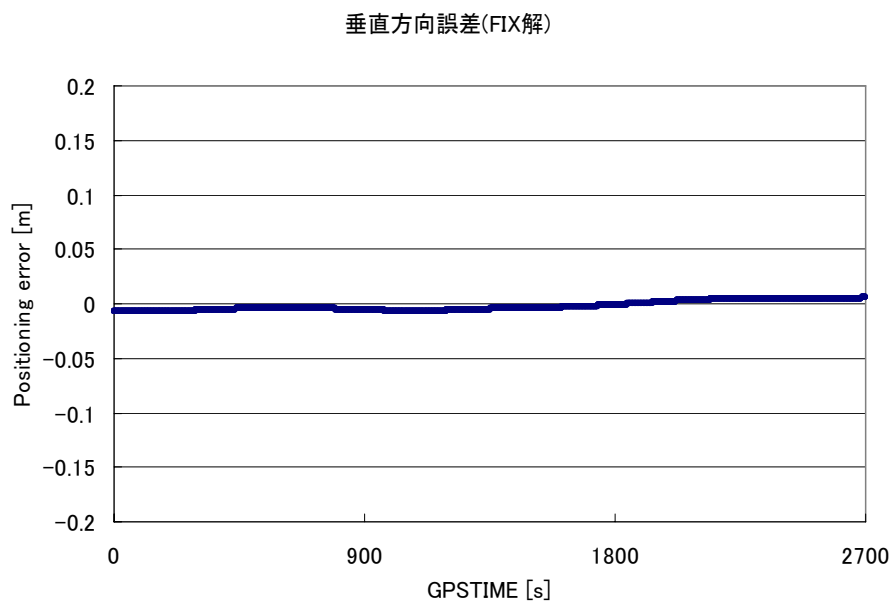


図 4-6 **FIX** 解アルゴリズム測位誤差(垂直方向)

第5章 LAMBDA 法による

Ambiguity 決定に関する研究

5-1 はじめに

GPS 測位における搬送波を利用する相対測位は mm~cm レベルでの高精度な測位精度を得ることができる測位法である。干渉測位では、搬送波位相の 2 重差を観測量として用いる。第 4 章でも述べたが、搬送波位相 $\phi^{(i)}$ (cycle) を式で表すと、

$$\phi^{(i)} = \lambda^{-1}(r^{(i)} - I^{(i)} + T^{(i)}) + f(\delta t_u - \delta t^{(i)}) + N^{(i)} + \varepsilon^{(i)} \quad (5.1)$$

で表され、 λ は搬送波の波長(m)、 r は衛星-利用者間の正確な距離(m)、 I_{L1} は L1 帯の電離層遅延量(m)、 T_{L1} は L1 帯の対流圏遅延量(m)、 f_{L1} は L1 帯の周波数(MHz)、 δt_u は受信機の時計誤差(s)、 δt は衛星の時計誤差(s)、 N_{L1} は L1 帯搬送波の整数値バイアス(cycle)、 ε_{L1} はマルチパス等の誤差(cycle)である。搬送波位相の 2 重差 $\phi_{u-r}^{(n-m)}$ (cycle) は、

$$\phi_{u-r}^{(n-m)} = \lambda^{-1}(r_{u-r}^{(n-m)} - I_{u-r}^{(n-m)} + T_{u-r}^{(n-m)}) + N_{u-r}^{(n-m)} + \varepsilon_{u-r}^{(n-m)} \quad (5.2)$$

で表せる。搬送波位相の 2 重差を観測量として利用する長所は、GPS 測位の誤差要因の多くを測位計算の前に相殺し、除去できることにある。具体的には、上記の式(5.1)、(5.2)からもわかるように、受信機と衛星の時計誤差を完全に消去でき、短基線であれば電離圏、対流圏の大気圏誤差もほぼ相殺できる。しかし、長基線になると大気圏誤差の消去は不可能になり、結果的に 2 重差に誤差を含むようになる。また、求められる未知数はあくまでも相対的な基線ベクトルであり、基準局の正確な座標を必要とする。

さらに、搬送波測位における中心課題として、第 4 章で述べた搬送波位相の持つ搬送波位相バイアス(Ambiguity)を整数値で決定しなければならないという課題が挙げられる。この問題により、誤った整数値の Ambiguity を導出すると大きな測位誤差が生じてしまうため、相対測位における正しい整数値の Ambiguity の決定は必要不可欠である。

本章では、Ambiguity の推定問題において探索手法が工夫された LAMBDA 法(Least-square Ambiguity Decorrelation Adjustment Method)について調査し、LAMBDA 法を用いて Ambiguity を決定し、基線長が異なる未知数点において干渉測位を行い、LAMBDA 法の適用は、Ambiguity 決定にどのような場合に有効であり、測位結果への影響がどの程度与えられるのかを調査した。

5-2 LAMBDA(Least-square Ambiguity Decorrelation Adjustment)法

第4章で述べたように、Ambiguity を決定する1つの方法として、測位計算において Ambiguity を未知数の1つと考え、単独測位における最小2乗法と同様に逐次近似計算によって実数で求めるといった float 解アルゴリズムがある。この実数の Ambiguity として与えられる float 解は、単純に四捨五入して整数値を求めようとする、細長い探索楕円により示され、強い相関により誤った値が得られてしまう。図5-1に2次元に単純化された float 推定値による Ambiguity 探索空間概念図をしめす。

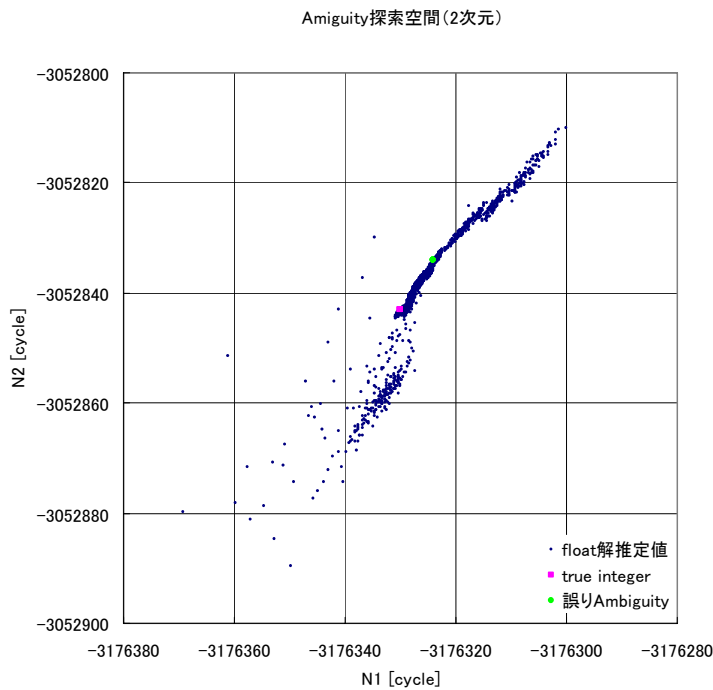


図5-1：2次元に単純化された Ambiguity 探索空間

そこで、LAMBDA 法では、Ambiguity を決定する際に、できる限り無相関化を行うことで、最適な解が得られるようにする工夫がされたアルゴリズムである。

LAMBDA 法のアルゴリズムは簡単に3段階の Step によって構成される。

Step1：float 解アルゴリズムから float 解を求め、それらの共分散行列を求める。

Step2：float 解アルゴリズムから正しい整数の Ambiguity をできるだけ高い確率で推定する

Step3：最終的に求めた Ambiguity より、位置を算出する。

まず、Step1 の float 解アルゴリズムから float 解を求め、それらの共分散行列 $Q_{\hat{N}}$ を求めるといった step から始まる。次の Step2 が LAMBDA 法の中で最も重要な Step であり、整数最小 2 乗問題として与えられるコスト関数、

$$c(N) = (N - \hat{N})^T W_{\hat{N}} (N - \hat{N}) \quad (5. 3)$$

を最小にするベクトル N (整数値の Ambiguity) を求める。 \hat{N} は Step1 において求めた float 解推定値であり、相関行列と呼ばれる $W_{\hat{N}}$ は、共分散行列 $Q_{\hat{N}}$ の逆行列である。この Step2 での最大の目標は、各 Ambiguity 推定値をできる限り無相関化(Decorrelation)することである。一般に無相関が意味するのは、ここでは $W_{\hat{N}}$ が対角行列であることなので、この $W_{\hat{N}}$ の対角化が無相関化を意味する。

そこで、結果として得られた相関行列が対角行列になるように変数変換を導入することで $W_{\hat{N}}$ の対角化を図る。この対角化を行うためには、Ambiguity の整数性を保持するべく、整数を整数に写像する変数変換が必要であるので、 Z 変換と呼ばれる変数変換が要求される。要求される Z 変換は、

- (i) Z のすべての要素は整数である
- (ii) Z は逆行列を持つ
- (iii) Z^{-1} のすべての要素は整数である
- (iv) Z はユニモジュラ行列である (すなわち、 $|\det(Z)|=1$)

以上のような条件を満たす必要がある。ここで、変換 Z を定義する。

$$M = Z^T N \quad , \quad \hat{M} = Z^T \hat{N} \quad , \quad Q_{\hat{M}} = Z^T Q_{\hat{N}} Z \quad (5. 4)$$

この変換により、式 (5. 3) は新しい整数最小 2 乗問題、

$$\min(M - \hat{M})^T Q_{\hat{M}}^{-1} (M - \hat{M}) \quad (5. 5)$$

に変形される。要求される変換 Z を達成するために、 $Q_{\hat{N}}$ 、 $Q_{\hat{M}}$ をコレスキー分解すると、

$$Q_{\hat{N}} = L^T D L \quad , \quad Q_{\hat{M}} = Z^T L^T D L Z = \bar{L}^T \bar{D} \bar{L} \quad (5. 6)$$

となる。ここで、 L は下三角行列であり(つまり L^T は上三角行列)、 D と \bar{D} は対角行列、

$$D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \quad , \quad \bar{D} = \text{diag}(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_n) \quad (5. 7)$$

であり、さらに $d_i, \bar{d}_i > 0$ である。このプロセスでは Q_N の $L^T DL$ 因数分解と、 Q_M の $\bar{L}^T \bar{D} \bar{L}$ 因数分解を与えるための要素の更新から始まり、

- (i) Q_M はできるだけ対角である (すなわち、 \bar{L} の非対角成分はできるだけ十分小さい)
- (ii) \bar{D} の対角成分は降順に分配される (すなわち、 $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$)

この二つの目標を達成するために、ユニモジュラ行列 Z を見つけようとするのである。このプロセスの繰り返しによりユニモジュラ行列 Z が構築される。もしこの Z を用いて W_N を完全に対角化可能であれば、LAMBDA 法は単純なアルゴリズムになるであろう。しかしながら、そのような場合はほとんど起きることは無く、各 Ambiguity 推定値が完全に無相関化されることはない。そのため、この Z による変数変換により、 W_N を可能な限り対角に近づけるための変換を行うことで、できる限り無相関化を行う。

ユニモジュラ行列 Z による定義、式(5.4)より、float 解 \hat{N} はできる限り無相関化された \hat{M} に変換され、この \hat{M} に対して四捨五入を行い、得られた M から N に戻す変換、つまり逆 Z 変換、

$$N = (Z^T)^{-1} M \tag{5.8}$$

を行えば、式(5.3)の元の最小2乗問題に対する最小解が得られる。

この最終的に求めた Integer Ambiguity を用いて、Step3 において測位計算を行い、位置を算出する。以上が3段階の Step から構成される LAMBDA アルゴリズムである。図5-2に LAMBDA 法の流れを示す。

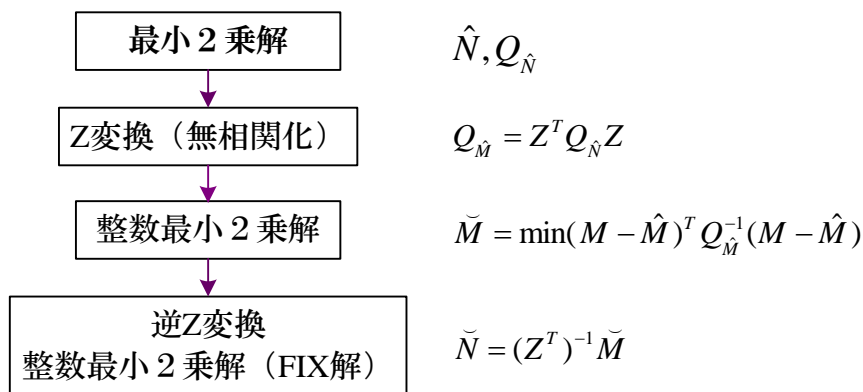


図 5-2 : LAMBDA 法 flow chart

5-3 LAMBDA 法を用いた干渉測位実験

5-3-1 実験概要

基線長の異なる 3 つの未知点と 1 箇所に固定した基準局で干渉測位を行い、LAMBDA 法による Ambiguity 決定や測位結果に及ぼす影響を評価する。

まず、図 5-2 のように基準局を GPS 電子基準点の藤沢局に設定し、基線長の異なる未知点を 3 箇所選択した。表 5-1 に基準局と各移動局の詳細を示す。

解析に使用したデータは以下の通りである。

- ・ 取得日時 : 平成 16 年 12 月 1 日午前 9 時から正午までの 3 時間
- ・ サンプリングレート : 1Hz
- ・ 三菱電機株式会社より提供された、GPS 電子基準点ネットワークの一部

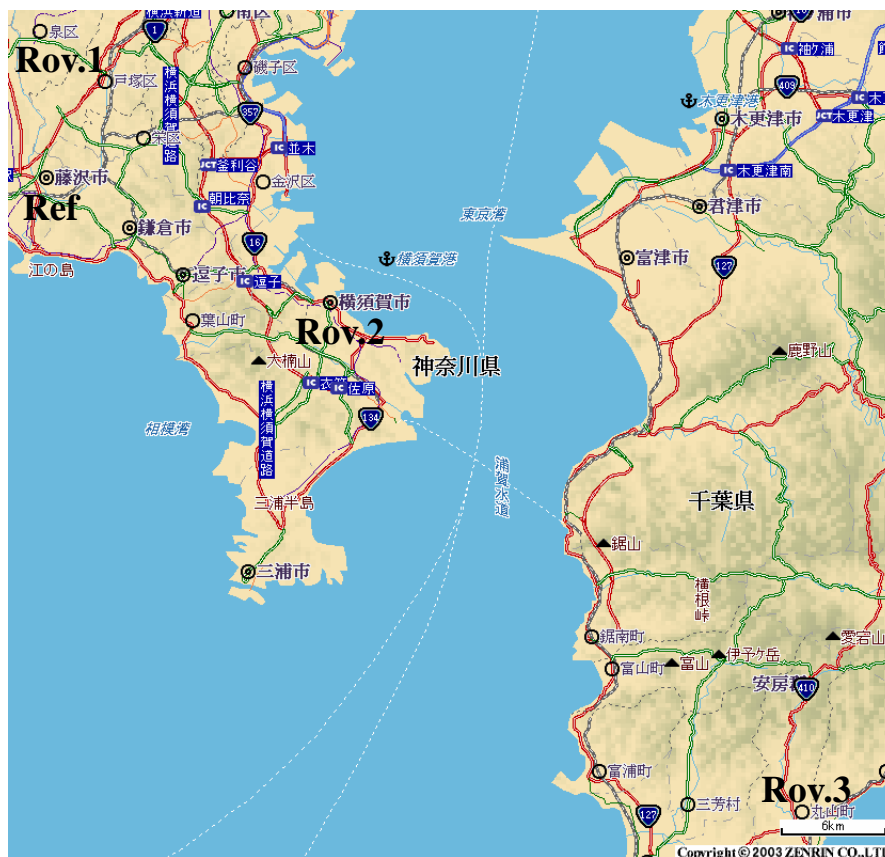


図 5-2 : 基準局、移動局位置の概要図

表 5-1 基準局と各移動局の詳細

局名称	表記	場所	基線長(km)
基準局	Ref	藤沢	
未知点 1	Rov.1	横浜市泉区	11.7
未知点 2	Rov.2	横須賀	19.3

未知点 3	Rov.3	丸山	58.7
-------	-------	----	------

Ambiguity 決定に LAMBDA 法アルゴリズムを使用し、L1 帯搬送波における干渉測位を行った。

5-3-2 測位結果

5-3-2-1 Ambiguity 探索空間

図 5-3、5-4、5-5 にそれぞれ基線長 11.7km、19.3km、58.7km の L1 帯搬送波による float 推定値の二次元相関分布図と、LAMBDA 法による Z 変換後の二次元相関分布図を示す。表 5-1 は、各基線長の float 推定値と、Z 変換後の相関係数を表す。

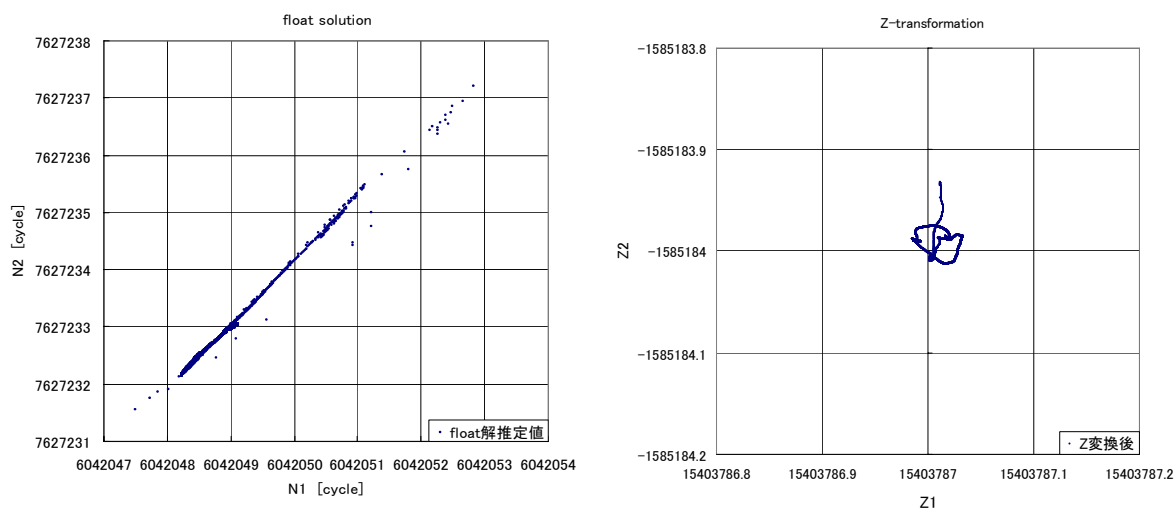


図 5-4: 基線長 11.7km の float 推定値と Z 変換後の 2 次元での Ambiguity 探索空間

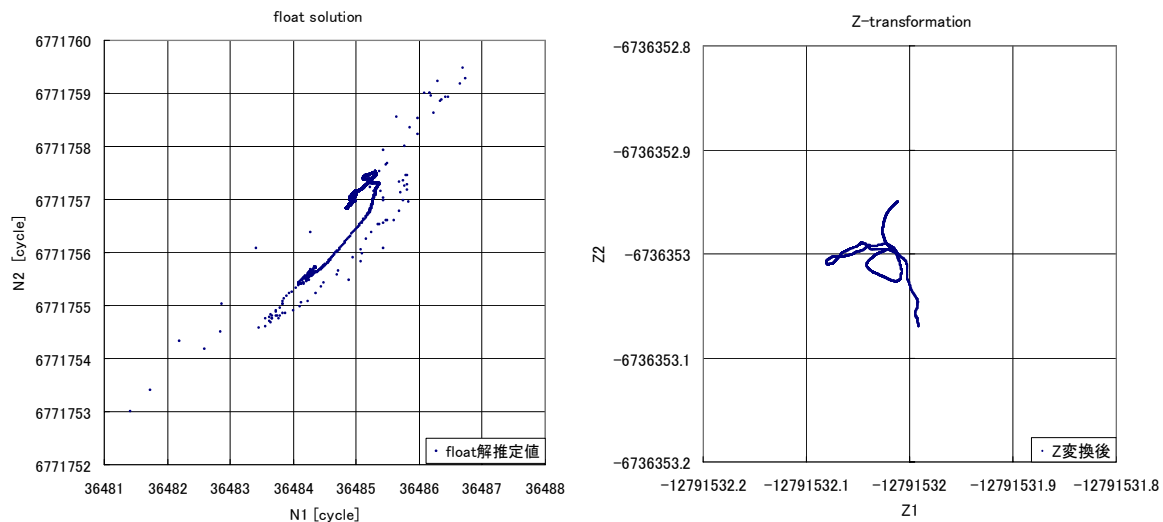


図 5-4 : 基線長 19.3km の float 推定値と Z 変換後の 2 次元での Ambiguity 探索空間

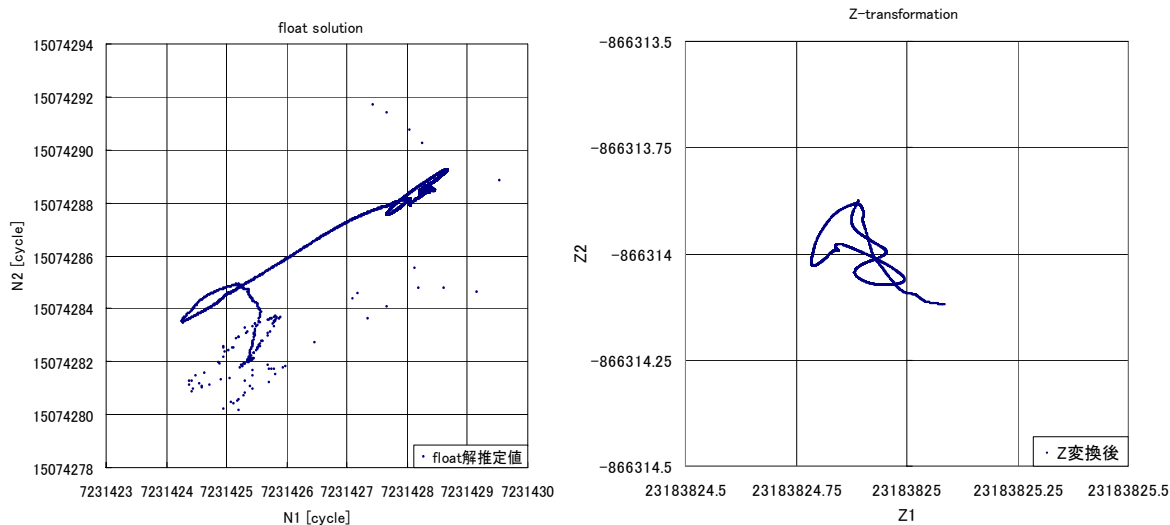


図 5-5 : 基線長 58.7km の float 推定値と Z 変換後の 2 次元での Ambiguity 探索空間

表 5-1 基線長ごとの各 float 解推定値と Z 変換後の相関係数

基線長	相関係数	
	Float解	Z変換後
11.7km	0.9954	-0.0618
19.3km	0.9077	-0.1887
58.7km	0.9348	-0.4527

表 5-1 より、各 float 推定値は各基線長において相関係数がほぼ 1 に近く、非常に強い相関を持つことが明らかである。LAMBDA 法では、float 解の持つ強い相関を可能な限り無相関化することが目標であり、各 float 推定値の Z 変換後において、基線長 11.7km での相関係数は-0.0618 で、ほぼ相関のない空間へと変換することができた。基線長 19.3km では相関係数-0.1887 と無相関であるとはいえないが、ほとんど相関は無い空間へと変換することができた。しかし、基線長 58.7km では相関係数が-0.4527 と中程度の相関を持ってしまう。

Z 変換により各 float 推定値の相関を弱めることはできるが、基線長が長くなるほど相関の強さは増大してしまいうことが確認できた。

5-3-2-2 Ambiguity 決定

図 5-6、5-7、5-8 にそれぞれ基線長 11.7km、19.3km、58.7km の L1 帯搬送波による Ambiguity 三次元分布図を示す。それぞれの図は、float 推定値(cycle)、LAMBDA 法により求めた整数値 Ambiguity(cycle)を示している。

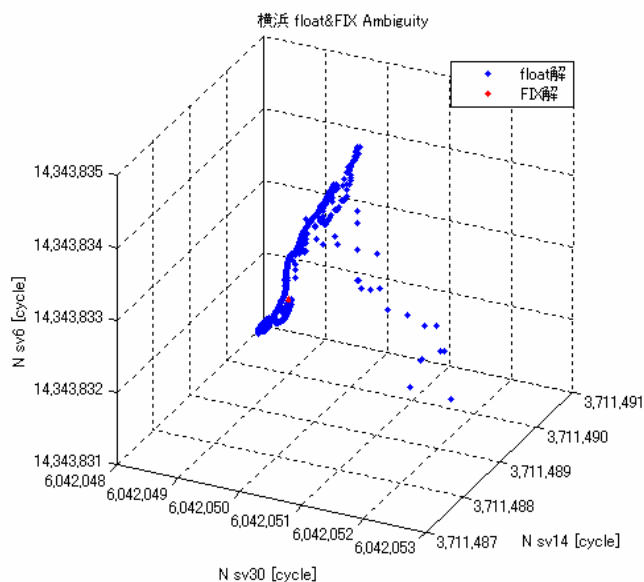


図 5-6: 基線長 11.7km の float 推定値と FIX 解

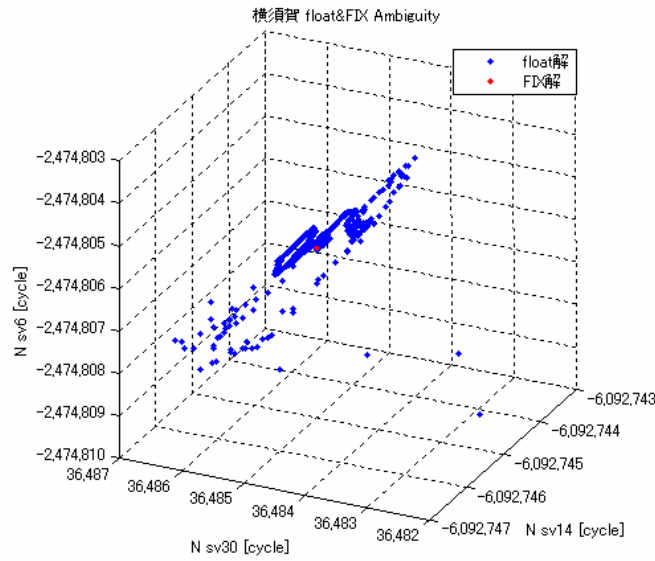


図 5-7: 基線長 19.3km の float 推定値と FIX 解

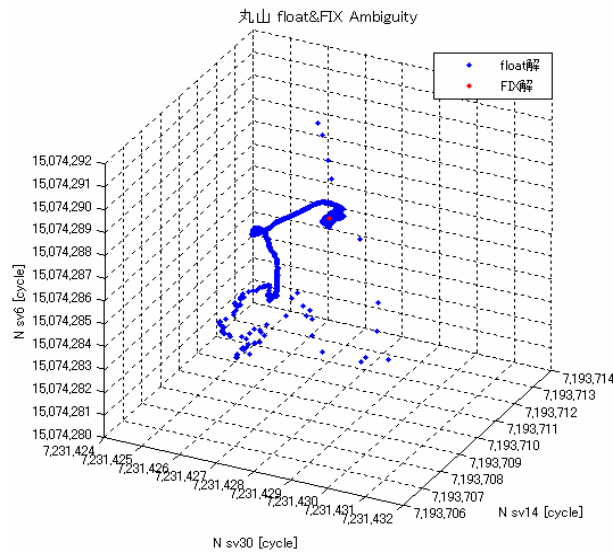


図 5-8: 基線長 58.7km の float 推定値と FIX 解

一般に Ambiguity に対する float 推定値は強い相関を持っており、単純に四捨五入して整数値を求めようとする誤った値が導かれてしまう。5-3-2-1 で示したように、Z 変換による float 推定値の変換された空間においては、Ambiguity の float 推定値は相関が弱められるため、単純に四捨五入を行い、Z 変換の逆変換を行うことで Ambiguity の真値にほぼ近い値を得ることができる。図 5-6,7,8 に表されるように、float 推定値の持つ強い相関にも関わらず、各基線長において

LAMBDA 法アルゴリズムにより導出した Ambiguity は正しく決定されている。

5-3-2-3 測位誤差

図 5-9、5-10、5-11 にそれぞれ基線長 11.7km、19.3km、58.7km の L1 帯搬送波による測位誤差を示す。図はそれぞれ第 4 章で述べた float 解アルゴリズムによる測位結果と、LAMBDA 法アルゴリズムによる測位結果を示し、図の軸はそれぞれ緯度方向誤差[m]、経度方向誤差[m]、垂直方向誤差[m]を表している。

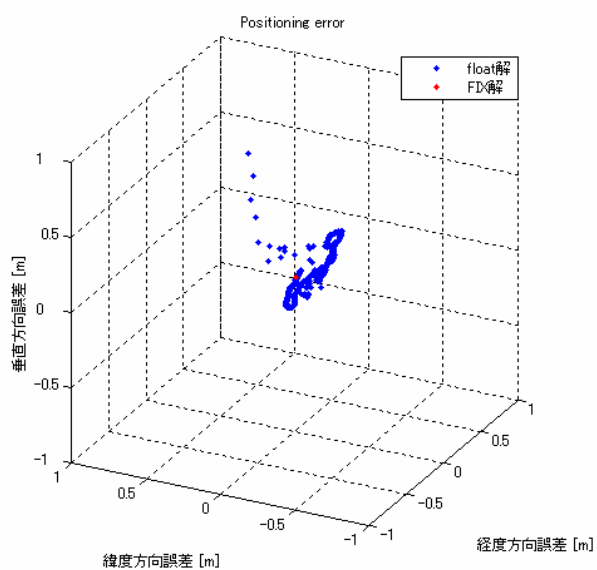


図 5-9 : 基線長 11.7km の L1 帯搬送波による測位誤差

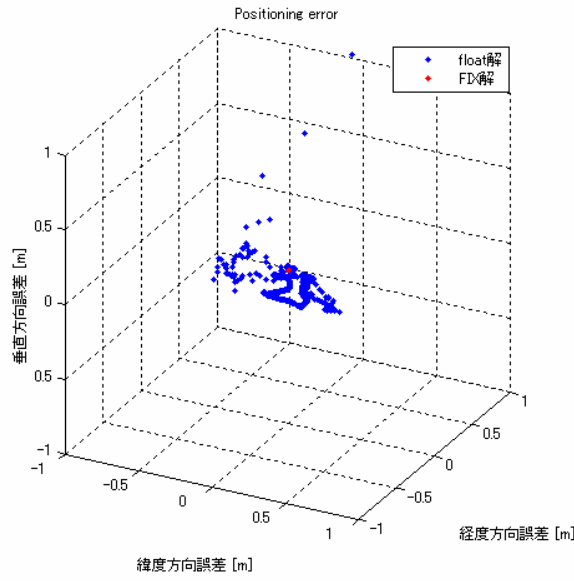


図 5-10 : 基線長 19.3km の L1 帯搬送波による測位誤差

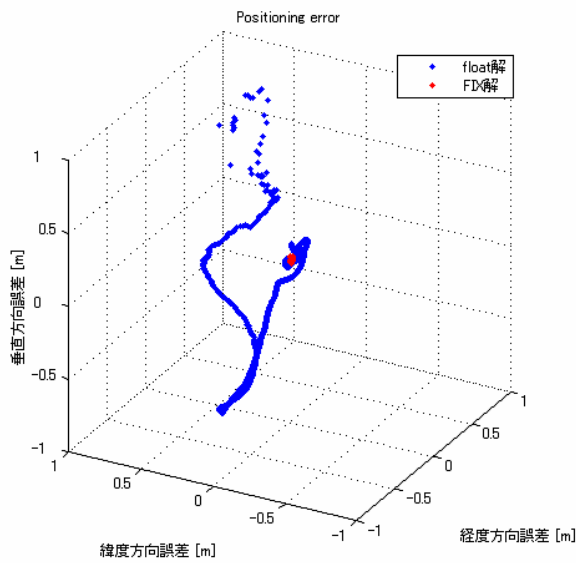


図 5-11 : 基線長 58.7km の L1 帯搬送波による測位誤差

LAMBDA法アルゴリズムによる測位結果は、図 5-9,10,11 に示されるように基線長に関わらず、安定した測位分布が得られている。

基線長 11.7km の測位結果は、float 解アルゴリズムによる緯度方向の標準偏差が 13.60cm、経度方向が 4.55cm、垂直方向が 7.42cm であるのに対し、LAMBDA 法アルゴリズムでは緯度方向の標準偏差が 0.18cm、経度方向が 0.09cm、垂直方向が 1.21cm である。float 解アルゴリズムによる緯度方向の測位誤差は-1.32cm、経度方向が-1.86cm、垂直方向が 0.33cm となり、LAMNDA

法アルゴリズムでは緯度方向が 0.54cm、経度方向が 0.79cm、垂直方向が 0.55cm となった。

基線長 19.3km の測位結果では、float 解アルゴリズムによる緯度、経度、垂直方向の標準偏差はそれぞれ 7.01cm、5.12cm、9.14cm であるのに対し、LAMBDA 法アルゴリズムではそれぞれ 0.18cm、0.09cm、1.21cm となった。float 解アルゴリズムによる緯度、経度、垂直方向の測位誤差はそれぞれ 1.13cm、1.18cm、1.01cm となり、LAMBDA 法アルゴリズムではそれぞれ 0.74cm、0.68cm、3.10cm となった。

基線長 58.7km の測位結果では、float 解アルゴリズムによる緯度、経度、垂直方向の標準偏差はそれぞれ 33.38cm、5.61cm、22.65cm であるのに対し、LAMBDA 法アルゴリズムではそれぞれ 0.34cm、0.62cm、1.54cm となった。float 解アルゴリズムによる緯度、経度、垂直方向の測位誤差はそれぞれ -1.85cm、1.38cm、3.84cm となり、LAMBDA 法アルゴリズムではそれぞれ 4.01cm、0.94cm、9.52cm となった。

表 5-2 に各基線長の float 解、LAMBDA 法アルゴリズムによる測位結果の各方向の標準偏差、表 5-3 に各基線長の float 解、LAMBDA 法アルゴリズムによる測位結果の各方向の平均値を示す。

表 5-2 : 各基線長の float 解、LAMBDA 法アルゴリズムによる測位誤差の各方向の標準偏差

Baseline	algorithm	標準偏差 [cm]		
		Latitude	Longitude	height
11.7km	float	13.60	4.55	7.42
	LAMBDA	0.18	0.09	1.21
19.3km	float	7.01	5.12	9.14
	LAMBDA	0.13	0.18	0.49
58.7km	float	33.38	5.61	22.65
	LAMBDA	0.34	0.62	1.54

表 5-3 : 各基線長の float 解、LAMBDA 法アルゴリズムによる測位誤差の各方向の平均値

Baseline	algorithm	平均値 [cm]		
		Latitude	Longitude	height
11.7km	float	-1.32	-1.86	0.33
	LAMBDA	0.54	0.79	0.55
19.3km	float	1.13	1.18	1.01
	LAMBDA	0.74	0.68	3.10
58.7km	float	-1.85	1.38	3.84
	LAMBDA	4.01	0.94	9.52

以上の結果から、LAMBDA 法アルゴリズムにより基線長に関わらず安定した測位分布が得られ、float 解アルゴリズムに比べかなりの測位精度向上がみられた。しかし、精度は基線長が長くなるにしたがって劣化することがわかる。基準局、未知点ともに搬送波の測距精度に大きな変化は無いと考えられるため、測位精度劣化の原因としては基線長が異なるという項目が考えられる。基線長が長くなると測定値に生じる電離圏、対流圏の大気圏伝搬遅延量が相殺されず、測位結果に影響し精度が劣化したと考えられる。

5-4 まとめと考察

基準局を固定し、基線長を 11.7km、19.3km、58.7km と変化させた 3 つの未知点で L1 帯搬送波による干渉測位を行い、LAMBDA 法の適用は、Ambiguity 決定にどのような場合に有効であり、測位結果への影響がどの程度与えられるのかを調査した。

Ambiguity 探索空間において、Ambiguity に対する float 推定値の持つ強い相関を LAMBDA 法の Z 変換により、基線長が短い場合は無相関とは言えないがほとんど相関が無い空間へと変換でき、基線長が長くなるほど相関は弱められても多少の相関を持つことを確認した。Ambiguity 決定では、Ambiguity に対する float 推定値の強い相関にも関わらず、各基線長においても LAMBDA 法により正しい整数値 Ambiguity が決定されている。

測位結果への影響は、LAMBDA 法アルゴリズムにより基線長に関わらず安定した測位分布が得られ、float 解アルゴリズムに比べかなりの測位精度向上がみられた。しかし、精度は基線長が長くなるにしたがって劣化することも確認できた。基準局、未知点ともに搬送波の測距精度に大きな変化は無いと考えられるため、測位精度劣化の原因としては基線長が異なるという項目が考

えられる。基線長が長くなると測定値に生じる電離圏、対流圏の大気圏伝搬遅延量が相殺されず、測位結果に影響し劣化したと考えられる。

今回の結果より、一般に LAMBDA 法は中、長基線での干渉測位に有効とされる Ambiguity 決定の手法の 1 つであるが、基線長の長さに比例して Ambiguity 推定値の無相関化を図るのは困難になり、測位結果にも影響を及ぼしてしまうことがわかった。しかし、今回の実験のように、L1 帯搬送波だけでは、中・長基線の場合、観測量として用いる搬送波位相の 2 重差の中に含まれる電離圏、対流圏伝搬遅延量が相殺されないと考えられ、観測量自体に誤差要因として残ってしまう。そこで、第 4 章で述べた電離圏伝搬遅延量に対して影響の少ない搬送波位相測定値の線形結合であるワイドレーンや、電離圏フリー結合といった搬送波を利用し観測量自体の誤差要因を消去・軽減することが、基線長が長くなるほど Z 変換後の Ambiguity 推定値が相関を持つてしまうことに対しての問題の解決策の 1 つとして挙げられると考えられる。

第6章 総括

6-1 結論

本稿では、mm~cm レベルでの高精度な GPS 測位が可能な搬送波位相を利用する高精度測位における中心課題として挙げられる Ambiguity 決定に関して、Ambiguity に対する float 推定値の探索空間と LAMBDA 法の適用による Ambiguity 探索空間の違いと、基線長との関係性を示すとともに、LAMBDA 法アルゴリズムと float 解アルゴリズムとの測位結果比較を行った。

第5章において、基準局を固定し基線長を 11.7km、19.3km、58.7km と変化させた3つの未知点で L1 帯搬送波による干渉測位を行い、Ambiguity 決定手法に LAMBDA 法を適用した。LAMBDA 法は、Z 変換により Ambiguity に対する float 推定値の持つ非常に強い相関を、出来る限り無相関化することで最適な解を得ようとする Ambiguity 決定手法の1つである。

Ambiguity 探索空間は、基線長 11.7km の未知点では、float 推定値の持つ相関係数が 0.9954 と非常に強い相関から相関係数-0.0618 と、無相関であるとは言えないが、ほとんど相関の無い空間へと変換することができ、基線長 19.3km の未知点においても、float 推定値の持つ相関係数 0.9077 の非常に強い相関から-0.1887 とほとんど相関を持たない空間へと変換できた。しかし、基線長 58.7km の未知点においては、float 推定値の相関 0.9348 から-0.4527 と中程度の相関を持ってしまい、基線長が長くなるほど Z 変換後でも Ambiguity 推定値は相関を持ってしまいうことが確認できた。

Ambiguity 決定では、Ambiguity 探索空間において、float 推定値の Z 変換により変換された空間では float 推定値の非常に相関が弱められるため、単純に四捨五入を行い、逆 Z 変換を行うことで float 推定値の強い相関にも関わらず真値にほぼ近い値整数値 Ambiguity を決定することができた。

float 解アルゴリズムと LAMBDA 法アルゴリズムとの測位結果は、LAMBDA 法アルゴリズムにより基線長に関わらず安定した測位分布が得られ、float 解アルゴリズムに比べかなりの測位精度向上が確認できた。しかし、基線長が長くなるにしたがって精度は劣化することも確認できた。基準局、未知点ともに搬送波の測距精度に大きな変化は無いと考えられるため、測位精度劣化の原因としては基線長が異なるという項目が考えられる。基線長が長くなると測定値に生じる電離圏、対流圏の大気圏伝搬遅延量が相殺されず、測位結果に影響し精度が劣化したと考えられる。

6-2 今後の課題

LAMBDA法のZ変換により、基線長11.7kmと19.3kmの未知点では、Ambiguityに対するfloat推定値の持つ非常に強い相関を持つ空間からほとんど相関を持たない空間へと変換することが出来たが、基線長58.7kmの未知点では中程度の相関を持ってしまうことがわかり、基線長が長くなるほどZ変換後でも相関を持ってしまうという課題も得た。これは、中・長基線の場合、観測量として用いる搬送波位相の2重差の中に含まれる電離圏、対流圏伝搬遅延量が相殺されず、観測量自体に誤差要因として残ってしまうことが原因の1つと考えられる。そこで、観測量自体の誤差要因を消去するために、一般に電離圏伝搬遅延量への影響がL1帯搬送波に比べて少ないといわれる搬送波位相測定値の線形結合であるワイドレーンや、電離圏フリー結合といった搬送波を利用し干渉測位実験を行い、L1帯、ワイドレーン、電離圏フリー結合の搬送波ごとの結果比較を行うことが今後の課題として挙げられる。

また、本研究ではfloat解アルゴリズムとLAMBDA法との比較のみであったが、OTF(On the fly)などの他のAmbiguity決定手法との比較等も行うことで、他のAmbiguity決定手法に対するLAMBDA法の有効性を示すことも今後の課題として挙げられる。

謝辞

本研究及び本稿作成において、日々ご指導・ご鞭撻頂きました、東京海洋大学情報通信工学研究室の安田明生教授に心から深く感謝申し上げます。安田教授のご指導があったおかげで、卒業論文を書き上げることができました。研究以外にもたくさんの知識を吸収させていただき、また、まだまだ未熟な私にも GPS/GNSS シンポジウム 2005 で研究発表を経験させていただくなど、充実した大学生活を送ることが出来ました。本当に有難うございました。

GPS を基礎から教えて下さり、測位計算プログラミング、研究方針についてもご指導頂きました東京海洋大学情報通信工学研究室の久保信明助手にも感謝申し上げます。

技官の川村雅志先生にも色々ご指導いただきました。日々の生活、GPS/GNSS シンポジウム、特に懇親会等で様々なことを教えていただき、感謝申し上げます。

東京海洋大学情報通信工学研究室の OB でもあり、兄でもある古野電気の富永貴樹さん。今現在私が情報通信工学研究室の在籍しているのは、兄の影響が最も大きいのではないかと思います。また、GPS/GNSS シンポジウムや、卒業研究等で様々なアドバイスを頂き、有難うございました。あまり飲み過ぎないようにして下さい。

先輩の近藤俊一郎さん、五味泰人さんにもいろいろご指導頂きました。行き詰ったとき、とにかくお二方に助けを求めているような気がします。近藤さんには、時間を割いて MATLAB 講座を開講していただき、また、社会勉強と称して格闘技観戦に連れて行っていただくなど貴重な体験をすることができました。有難うございました。五味さんには、プログラムの組み方や GPS の基礎的なことを多く教えて頂きました。また、結果が出ないとき等、朝方まで研究に付き合っていたことが幾度もありました。ご迷惑をお掛けしました。そして、本当に有難うございました。一緒に無敵の「Integer Ambiguity」を創りましょう。ところで、飲酒運転は違法だをご存知ですか。

同期の皆さんにも感謝致します。特に湯浅純一郎くんには私生活の面でも大変お世話になりました。バイクのプレートカバー壊してごめんなさい。

情報通信工学研究室の皆様にも感謝致します。有難うございました。

最後に、両親・姉兄はもちろん、私の支えとなってくれた愛する家族へ。いままで本当にお世話になりました。病気で倒れたときなど、多くの心配をお掛けしましたが、何とか無事に大学生活を終えることが出来ました。ありがとう。

以上です。本当に有難うございました。

参考文献

- [1] Pratap Misra, Per Enge 原著、日本航海学会 GPS 研究会(安田明生、他 8 名)訳「精説 GPS 基本概念・測位原理・信号と受信機」、社団法人 日本航海学会 GPS 研究会
- [2] 安田明生「GPS シンポジウム 2005」、社団法人 日本航海学会 GPS 研究会
- [3] 土屋淳・辻宏道「新・GPS 測量の基礎」、日本測量協会
- [4] Gilbert Strang, Kai Borre 「Linear Algebra Geodesy, and GPS」
- [5] 岡本信也「長其線 DGPS 測位および干渉測位の精度に関する研究」、東京海洋大学修士論文
- [6] 富永貴樹「GPS 測位における電離圏遅延に関する研究」、東京海洋大学修士論文
- [7] X.-W.Chang, X.Yang, T.Zhou 「A modified LAMBDA method for integer least-squares estimation」 McGill University
- [8] 高須知二「測位衛星による高精度測位技術の開発研究」
<http://gpspp.sakura.ne.jp/index.shtml>